



# Modélisation des effets rhéologiques dans les matériaux : application au comportement mécanosorptif du bois

Omar Saifouni

## ► To cite this version:

Omar Saifouni. Modélisation des effets rhéologiques dans les matériaux : application au comportement mécanosorptif du bois. Matériaux. Université Blaise Pascal - Clermont-Ferrand II, 2014. Français. NNT : 2014CLF22468 . tel-01069026

**HAL Id: tel-01069026**

**<https://theses.hal.science/tel-01069026>**

Submitted on 26 Sep 2014

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# **Université Blaise Pascal - Clermont II**

ÉCOLE DOCTORALE  
SCIENCES POUR L'INGENIEUR DE CLERMONT-FERRAND  
**Institut Pascal**

## **T h è s e**

Présentée par  
**OMAR SAIFOUNI**

pour obtenir le grade de

**DOCTEUR D'UNIVERSITE**

**SPECIALITE : Mécanique du solide**

**Modélisation des effets rhéologiques dans les matériaux :  
application au comportement mécanosorptif du bois**

Soutenue publiquement le 26 / 06 / 2014 devant le jury :

M. Abdelhamid BOUCHAIR	Prof, Université Blaise Pascal, Clermont-Ferrand	Président
M. Frédéric DUBOIS	Prof, Université de Limoges	Rapporteur
M. Joseph GRIL	Directeur de recherche, CNRS, Montpellier	Rapporteur
M. Bruno JURKIEWIEZ	MCF, HDR, Université Lyon 1, Lyon	Examineur
M. Jean-François DESTREBECQ	Prof, Université Blaise Pascal, Clermont-Ferrand	Directeur de thèse
M. Rostand MOUTOU PITTI	MCF, Université Blaise Pascal, Clermont-Ferrand	Co-encadrant



*À ma mère, à mon père*

*À mon épouse, à toute ma famille*

*À mes amis*



## REMERCIEMENTS

*J'adresse mes gratitudes à mon directeur de thèse, Monsieur Jean François Destrebecq de m'avoir appris et transmit son savoir pendant ces années de thèses et qui a contribué pour une large part au bon déroulement de ce travail.*

*Je remercie, très particulièrement, Monsieur Rostand Moutou Pitti, pour son co-encadrement de la thèse et pour m'avoir apporté son suivi de thèse, ses conseils et ses encouragements.*

*J'adresse mes remerciements aux membres de l'action COST FP0409 pour le soutien financier qui m'a permis d'effectuer le déplacement pour la réalisation des essais à Bienne. Je remercie Monsieur Frédéric Pichelin le chef de l'équipe matériaux et technologie du bois (BFH) pour m'avoir accueilli dans ses locaux.*

*Je remercie aussi Monsieur Parviz Navi, d'une part d'avoir accepté de superviser le STSM, d'autre part pour les nombreuses discussions que nous avons pu avoir pendant mon séjour à Bienne (Suisse). Un spécial remerciement à Monsieur Julien Froidevaux pour son collaboration étroite aux essais. Mes amicales pensées à tous les membres du BFH, pour leur précieuse collaboration.*

*C'est avec un grand plaisir que je remercie Messieurs Frédéric Dubois et Josef Gril d'avoir accepté de rapporter ce travail.*

*Je remercie également Monsieur Abdelhamid Bouchair d'avoir accepté de présider le jury et aussi Monsieur Bruno Jurkiewicz d'avoir accepté de faire partie du jury.*

*Enfin, c'est tous les collègues de l'institut Pascal et de l'IFMA que je remercie chaleureusement pour leur contribution directe ou indirecte à ce travail.*



## RESUME

Le présent travail porte sur l'étude expérimentale, analytique et numérique du comportement mécanosorptif et viscoélastique couplé du bois. Le comportement mécanosorptif intègre notamment le phénomène hygroverrou qui se caractérise par un blocage des déformations en phase de séchage sous contrainte. Afin d'aborder cette étude, la structure, la microstructure ainsi que le comportement hydromécanique du bois sont rappelés. Parallèlement, la théorie de la viscoélasticité linéaire ainsi que les méthodes analytiques propres à la résolution de tels problèmes sont présentées. Ensuite, des essais mécanosorptifs préliminaires de caractérisation des propriétés mécaniques sont effectués sur du Sapin Blanc (*Abies alba* Mill.) du Massif central grâce à un dispositif expérimental approprié. La description du dispositif expérimental, du protocole utilisé ainsi que les dimensions des échantillons testés sont présentées. Des essais mécanosorptifs en relaxation et en fluage sous chargement et humidité relative variables sont également effectués. En particulier, deux essais en relaxation sous déformation imposée constante et humidité relative variable et un essai de fluage sous contrainte et humidité relative variables de façon cyclique, sont exposés. Sur la base des données issues des essais préliminaires et viscoélastiques, la déformation hygroverrou est isolée via la partition de la déformation selon des parts élastique, visqueuse et hydrique. Par la suite, un modèle analytique est proposé pour la modélisation de la déformation hygroverrou. Un modèle pseudo élastique, basé sur les lois de Hooke (en humidification) et de Hooke restreint (en séchage), est formulé en rigidité et en complaisance. Dans ce cas, plusieurs modèles rhéologiques viscoélastiques mécanosorptifs sont proposés. Ces modèles sont classés en fonction du couplage de leurs effets et du principe de partition formulés en contrainte ou en déformation. Des lois de comportement basées sur ces modèles et formulées sous forme d'équations intégrales et incrémentales adaptées à la mise en œuvre numérique sont finalement développées. Enfin, des exemples illustratifs montrent l'équivalence des deux expressions pseudo élastiques formulées en rigidité et en complaisance ; parallèlement, une validation des modèles viscoélastiques mécanosorptifs proposés, en relaxation et en fluage, par comparaison aux résultats expérimentaux est effectuée. Ces résultats montrent l'efficacité des modèles établis ainsi que la pertinence des essais expérimentaux réalisés pour la mise en évidence et la prise en compte des comportements mécanosorptif et viscoélastique couplés.

Mots clés : bois, viscoélasticité, comportement mécanosorptif, hygroverrou, formulation incrémentale.





## ABSTRACT

This work focuses on experimental, analytical and numerical study of the coupled viscoelastic mechanosorptive behavior of wood under complex mechanical loading. The mechanosorptive behavior incorporates hygroverrou phenomenon, it is the deformation locking that expresses a distortion in the drying phase under stress. For this study, the structure, microstructure and hydromechanical behavior of wood are recalled. Meanwhile, the viscoelasticity linear theory's and the analytical resolution methods of such problem are presented. Then, mechanosorptive tests are performed on white fir (*Abies Alba* Mill.) with appropriate experimental device. The description of the experimental device, the protocol used and the dimensions of the samples tested are shown. Moreover, mechanosorptive tests in relaxation and creep under variables load and in relative humidity are carried out. Two relaxation tests under constant imposed deformation and variable relative humidity and a test under variables stress and relative humidity cyclically are exposed. Based on data from preliminary viscoelastic and tests, the hygrolock strain is isolated according to the partition of the deformation to elastic, viscous and hydric parts. Subsequently, an analytical model is proposed for modeling the hygrolock strain. Finally, a pseudo-elastic model, based on the Hooke (humidification) and Hooke restricted laws (in drying), is formulated in rigidity and compliance. Subsequently, several viscoelastic mechanosorptive rheological models are proposed. The models are classified according to the coupling effects as well as the partition stress or strain principle. The behavior laws based on these models are formulated as integrals and incremental equations suitable for numerical implementation. Thereafter, illustrative examples have shown the equivalence of the two formulations and followed by validation of viscoelastic models mechanosorptive proposed in relaxation and creep compared with experimental results. Finally, these results demonstrate the effectiveness of established models and the quality of the proposed models on consideration of viscoelastic mechanosorptive behavior and experimental tests coupled.

Keywords: wood, viscoelasticity, mechanosorptive behavior, hygrolock, incremental formulation.



# TABLE DE MATIERE

<b>RESUME .....</b>	<b>I</b>
<b>ABSTRACT .....</b>	<b>III</b>
<b>TABLE DE MATIERE .....</b>	<b>V</b>
<b>LISTE DES TABLEAUX.....</b>	<b>XI</b>
<b>LISTE DES FIGURES .....</b>	<b>XIII</b>
<b>INTRODUCTION .....</b>	<b>1</b>
<b>PARTIE I : COMPORTEMENT HYDROMECHANIQUE DU BOIS .....</b>	<b>3</b>
<b>CHAPITRE 1. LE MATERIAU BOIS .....</b>	<b>5</b>
<b>1.1 Xylogologie du bois .....</b>	<b>5</b>
1.1.1 La structure du bois .....	5
1.1.1.1 Macrostructure .....	5
1.1.1.2 Microstructure .....	6
1.1.1.3 Ultrastructure .....	6
1.1.1.4 Orientation des éléments du bois .....	7
1.1.2 Hygroscopie du bois .....	7
1.1.2.1 Eau dans le bois.....	7
1.1.2.2 Équilibre hydrique et isotherme de sorption .....	8
1.1.2.3 Retrait / Gonflement.....	8
<b>1.2 Comportement mécanique du bois .....</b>	<b>10</b>
1.2.1 Comportement élastique orthotrope.....	10
1.2.2 Comportement viscoélastique à humidité constante .....	11
1.2.3 Comportement viscoélastique à humidité variable .....	13
1.2.3.1 Le comportement mécanosorptif.....	13
1.2.3.2 Trajectoire de mécanosorption et limite du fluage .....	15

1.2.3.3	Le seuil mécanosorptif .....	16
1.2.4	Conclusion .....	17
<b>CHAPITRE 2. BASES POUR LA MODELISATION .....</b>		<b>19</b>
<b>2.1</b>	<b>Théorie de la viscoélasticité linéaire .....</b>	<b>19</b>
2.1.1	Tenseurs de retard et de relaxation .....	19
2.1.2	Milieu viscoélastique linéaire .....	20
2.1.3	Modèles rhéologiques .....	22
2.1.4	Identification des paramètres des modèles rhéologiques .....	25
2.1.5	Relation entre fonctions de fluage et de relaxation .....	25
<b>2.2</b>	<b>Résolution d'un problème viscoélastique .....</b>	<b>26</b>
2.2.1	Méthodes simplifiées .....	26
2.2.2	Principe de correspondance .....	27
2.2.3	Approximation numérique de l'équation différentielle .....	28
2.2.4	Méthode d'intégration numérique de l'équation intégrale .....	28
2.2.5	Formulation incrémentale .....	30
<b>2.3</b>	<b>Modèles mécanosorptifs .....</b>	<b>31</b>
<b>2.4</b>	<b>Conclusion .....</b>	<b>34</b>
<b>PARTIE II : ÉTUDE EXPERIMENTALE .....</b>		<b>35</b>
<b>CHAPITRE 3. PROTOCOLE EXPERIMENTAL .....</b>		<b>37</b>
<b>3.1</b>	<b>Description du dispositif .....</b>	<b>37</b>
<b>3.2</b>	<b>Préparation des échantillons .....</b>	<b>39</b>
3.2.1	Échantillons pour les essais de sorption .....	39
3.2.2	Échantillons pour les essais à l'aide de la machine de traction hydrothermique .....	39
<b>3.3</b>	<b>Programme expérimental .....</b>	<b>41</b>
<b>CHAPITRE 4. ESSAIS PRELIMINAIRES .....</b>		<b>43</b>
<b>4.1</b>	<b>Essais de caractérisation hydrique .....</b>	<b>43</b>
4.1.1	Isotherme de sorption .....	43

4.1.1.1	Hystérésis de sorption .....	43
4.1.1.2	Relation entre $w$ et $HR$ .....	44
4.1.2	Déformation hydrique.....	44
<b>4.2</b>	<b>Essais de caractérisation mécanique instantanée .....</b>	<b>46</b>
4.2.1	Essais de traction jusqu'à la rupture .....	46
4.2.2	Évolution du module d'élasticité en fonction de $HR$ et de $w$ .....	47
<b>4.3</b>	<b>Essais viscoélastiques à humidité constante .....</b>	<b>48</b>
4.3.1	Essais de relaxation et de fluage à 30% d'humidité relative .....	48
4.3.1.1	Comparaison des courbes de relaxation et de fluage.....	49
4.3.1.2	Identification des paramètres .....	50
4.3.2	Essai de relaxation-effacement à 25% d'humidité relative .....	52
4.3.3	Relaxation sous différents niveaux de sollicitation et taux humidité relative .....	53
<b>4.4</b>	<b>Conclusions .....</b>	<b>57</b>
<b>CHAPITRE 5. ESSAIS MECANOSORPTIFS.....</b>		<b>59</b>
<b>5.1</b>	<b>Essais à humidité variable en déformation bloquée .....</b>	<b>59</b>
<b>5.2</b>	<b>Essais mécanosorptifs en relaxation à déformation imposée constante.....</b>	<b>60</b>
5.2.1	Présentation des résultats .....	60
5.2.1.1	Cycle d'humidification/séchage à partir d'un état « sec ».....	60
5.2.1.2	Cycle de séchage/humidification à partir d'un état « humide » .....	61
5.2.2	Contrainte viscoélastique à humidité relative variable .....	62
5.2.3	Contrainte hygroverrou.....	64
5.2.4	Contrainte hygroverrou pseudo-élastique .....	67
<b>5.3</b>	<b>Essai mécanosorptif à contrainte et humidité variables .....</b>	<b>68</b>
5.3.1	Description de l'essai.....	68
5.3.2	Mise en évidence de la déformation hygroverrou.....	69
5.3.3	Déformation hygroverrou pseudo-élastique .....	76
5.3.4	Reconstruction de l'évolution de la déformation totale .....	77

<b>5.4 Conclusion.....</b>	<b>78</b>
<b>PARTIR III. ÉTUDE ANALYTIQUE .....</b>	<b>79</b>
<b>CHAPITRE 6. MODELISATION ANALYTIQUE .....</b>	<b>81</b>
<b>6.1 Modèles à effet hygroverrou « pseudo-élastique » .....</b>	<b>81</b>
6.1.1 Cadre général.....	81
6.1.1.1 Comportement hydromécanique du bois.....	81
6.1.1.2 Cadre thermodynamique .....	82
6.1.2 Approche en rigidité .....	83
6.1.2.1 Déformation constante en séchage .....	84
6.1.2.2 Chargement constant pour une teneur en eau variable .....	85
6.1.2.3 Chargement et teneur en eau variables .....	86
6.1.3 Approche en complaisance .....	88
6.1.3.1 Chargement constant et teneur en eau variable .....	89
6.1.3.2 Chargement et teneur en eau variables .....	89
<b>6.2 Couplage viscoélastique-hygroverrou .....</b>	<b>90</b>
6.2.1 Cadre général.....	90
6.2.2 Modèles à effet hygroverrou découplé .....	91
6.2.3 Modèles à effet hygroverrou partiellement couplé .....	91
6.2.3.1 Construction d'une loi de comportement .....	92
6.2.3.2 Résolution numérique .....	93
6.2.4 Modèles à effet hygroverrou couplé .....	94
6.2.4.1 Principe et modèles élémentaires .....	94
6.2.4.2 Formulation viscoélastique à paramètres variables .....	95
6.2.4.3 Formulation mécanosorptive viscoélastique .....	97
<b>6.3 Conclusion.....</b>	<b>99</b>
<b>CHAPITRE 7. SIMULATIONS NUMERIQUES ET VALIDATION .....</b>	<b>101</b>
<b>7.1 Application à la simulation du comportement pseudo-élastique hygroverrou .....</b>	<b>101</b>

7.1.1	Chargement en paliers de déformation et humidité variable .....	101
7.1.2	Simulation pour une contrainte et une teneur en eau cycliques .....	103
<b>7.2</b>	<b>Application à la simulation du comportement viscoélastique .....</b>	<b>104</b>
7.2.1	Comportement en relaxation et fluage .....	104
7.2.2	Simulation des contraintes de dessiccation dans une rondelle de bois vert .....	107
7.2.2.1	Données expérimentales.....	107
7.2.2.2	Formulation viscoélastique incrémentale .....	108
7.2.2.3	Implémentation dans un code de calcul par éléments finis .....	110
7.2.2.4	Application à la rondelle de bois vert.....	110
<b>7.3</b>	<b>Simulation du comportement viscoélastique mécanosorptif .....</b>	<b>112</b>
7.3.1	Chargement constant et humidité variable.....	112
7.3.2	Chargement et humidité variables .....	113
<b>7.4</b>	<b>Conclusion.....</b>	<b>114</b>
<b>CONCLUSION.....</b>		<b>115</b>
<b>BIBLIOGRAPHIE .....</b>		<b>119</b>
<b>ANNEXES .....</b>		<b>127</b>





## LISTE DES TABLEAUX

Tableau 3-1 : Humidités relatives pour les solutions salines utilisées.....	38
Tableau 3-2 : Identification des échantillons utilisés.....	40
Tableau 3-3 : Répartition des échantillons utilisés en fonction des essais.....	41
Tableau 4-1 : Paramètres des modèles de Maxwell identifiés à partir de l'essai de relaxation. ....	51
Tableau 4-2 : Paramètres des modèles de Kelvin identifiés à partir de l'essai de fluage. ....	52
Tableau 5-1 : Différents termes constituant la loi de comportement viscoélastique en fluage sous humidité relative et chargement variables.....	72
Tableau 7-1 : Paramètres du modèle incrémental. ....	110



# LISTE DES FIGURES

Figure 1-1 : Les différentes parties du tronc d'un arbre. ....	5
Figure 1-2 : Organisation cellulaire d'un bois résineux .....	6
Figure 1-3 : Illustration d'une cellule de bois avec l'organisation des différentes couches de la paroi cellulaire, LM : lamelle mitoyenne, P : paroi primaire, S : paroi secondaire avec ses couches S1, S2 et S3 .....	6
Figure 1-4 : Directions principales dans le bois. ....	7
Figure 1-5 : Représentation schématique des trois états de l'eau dans le bois .....	8
Figure 1-6 : Représentation théorique de l'isotherme de sorption. ....	8
Figure 1-7 : Déformation volumique en fonction de la teneur en eau.....	9
Figure 1-8 : Variation des coefficients de gonflement volumique $\alpha_V$ , tangentiel $\alpha_T$ et radial $\alpha_R$ du bois (bouleau) en fonction de la teneur en eau d'après Keylwerth (1964) cité par .....	9
Figure 1-9 : Déformation et fissuration par retrait des pièces en fonction de leur position et leur direction .....	10
Figure 1-10 : Évolution du module d'Young en fonction de la teneur en eau .....	11
Figure 1-11 : (a) Essais de relaxation/effacement à HR constante pour différents paliers de déformation imposée ; (b) essais de fluage/recouvrance en contrainte imposée pour différents taux d'humidité relative .....	12
Figure 1-12 : Effet de la variation de la teneur en eau sur le fluage de la flèche sous chargement constant .....	13
Figure 1-13 : Évolution de la réponse différée sous environnement constant (93%HR) et variable pour deux niveaux de chargement en flexion . ....	14
Figure 1-14 : Construction de la trajectoire mécanosorptive : déformation totale $\varepsilon$ , déformation hydrique $\varepsilon_w$ et contrainte $\sigma$ en fonction du temps (a) ; trajectoire mécanosorptive (b) .....	15
Figure 1-15 : Courbe de sorption montrant le fluage limite .....	15
Figure 1-16 : Évolution de la flèche au cours du temps d'échantillons soumis à des cycles d'humidité relative entre 15% et 90% .....	16
Figure 1-17 : Humidité relative (trait discontinu) et flèche relative (trait continu) en fonction du temps (a) ; trajectoires mécanosorptives (b) .....	16

Figure 1-18 : Trajectoires mécanosorptives : résultat expérimental brut (ligne continue), résultat corrigé pour tenir compte de la réduction de la section transversale (ligne pointillée) (a) ; illustration par l'utilisation de la notation ( $\pm$ ) (b).....	17
Figure 1-19 : Comparaison de trajectoires mécanosorptives : (a) à un état sec (HR=40%) ; (b) à un état humide (HR=92%) .....	17
Figure 2-1 : Courbe d'hystérésis d'un matériau viscoélastique. ....	19
Figure 2-2 : Essai de fluage-recouvrance (a) ; essai de relaxation-effacement (b). ....	19
Figure 2-3 : Comportement viscoélastique linéaire - principe de superposition de Boltzmann. ....	21
Figure 2-4 : Modèle de Maxwell (a) ; modèle de Maxwell généralisé (b).....	23
Figure 2-5 : Modèle de Kelvin (a) ; modèle de Kelvin généralisé (b).....	24
Figure 2-6 : Graphe de la fonction de relaxation (a) ; Graphe de la fonction de fluage (b). ....	24
Figure 2-7 : Illustration du fluage limite .....	32
Figure 2-8 : Illustration des rigidités minimales pour deux incréments de chargement .....	33
Figure 2-9 : Ressort hygroverrou .....	34
Figure 2-10 : Modèle de Kelvin à élasticité instantanée avec ressort hygroverrou .....	34
Figure 3-1 : Dispositif pour la détermination de l'isotherme de sorption-désorption. ....	37
Figure 3-2 : Dispositif expérimental : vues d'ensemble.....	38
Figure 3-3 : Machine de traction-compression hydro-thermique. ....	39
Figure 3-4 : Zones de prélèvement des échantillons. ....	40
Figure 3-5 : Préparation des échantillons (a) ; Echantillons préparés (b). ....	40
Figure 3-6 : Planning des essais. ....	41
Figure 4-1 : Isotherme de sorption-désorption. ....	43
Figure 4-2 : Teneur en eau en fonction de l'humidité relative. ....	44
Figure 4-3 : Variation au cours du temps : (a) humidité relative, (b) déformation hydrique. ....	45
Figure 4-4 : Évolution de la déformation hydrique en fonction de l'humidité relative.....	45
Figure 4-5 : Exemples de diagrammes de traction jusqu'à la rupture pour HR=50%. ....	46
Figure 4-6 : Modes de rupture des échantillons en traction. ....	46

Figure 4-7 : Diagramme des contraintes de rupture en traction pour différentes humidités relatives. ....	47
Figure 4-8 : Variation du module d'élasticité en fonction de $HR(\%)$ . ....	47
Figure 4-9 : Comparaison du module d'élasticité expérimental avec celui proposée par Guitard [GUI 87]. ....	48
Figure 4-10 : Essais à $HR=30\%$ : relaxation-effacement (a) ; fluage-recouvrance (b). ....	49
Figure 4-11 : Courbes expérimentales de fluage et de relaxation relatives et leurs courbes inversées, pour $HR=30\%$ . ....	50
Figure 4-12 : Comparaison de la courbe expérimentale (trait noir) avec les modèles analytiques identifiés à partir des données expérimentale en relaxation (a) et en fluage (b). ....	52
Figure 4-13 : Essai de relaxation-effacement à 25% d'humidité relative. ....	53
Figure 4-14 : (a) Essais de relaxation-effacement à 5% d'humidité relative ; (b) Essais de relaxation à 70% d'humidité relative. ....	53
Figure 4-15 : Courbes des contraintes relatives pour la détermination du domaine de linéarité à une humidité relative de (a) 5% (échantillon P22-7) ; (b) 70% (échantillon P24-4). ....	54
Figure 4-16 : Essais de relaxation : (a) échantillons P22-9 et P24-3 ( $HR = 50\%$ ) ; (b) échantillon P22-10, ( $HR = 75\%$ ). ....	54
Figure 4-17 : Evolution de l'écart entre les courbes de relaxation relative réalisées à 30% et 70% d'humidité relative en fonction du temps. ....	55
Figure 4-18 : Comparaison entre l'expression analytique (4.8) (traits pointillés) et les courbes expérimentales (traits continus). ....	56
Figure 4-19 : Variation au cours du temps à différents taux d'humidité relative des : (a) courbes de relaxation (b) courbes de fluage. ....	56
Figure 4-20 : Fonctions de relaxation à différents taux d'humidité relative. ....	57
Figure 5-1 : Diagrammes des contraintes hydriques en fonction du temps. ....	59
Figure 5-2 : Essai de relaxation-effacement ( $HR = 30\%$ , trait pointillé rouge) ; Essai mécanosorptif (trait noir) ; Contrainte hydrique (a) ; Humidité relative (b) ; Déformation imposée (c). ....	60
Figure 5-3 : Essai de relaxation-effacement ( $HR = 30\%$ , trait pointillé rouge) ; Essai mécanosorptif (trait noir) ; Contrainte hydrique (a) ; Humidité relative (b) ; Déformation imposée (c). ....	62
Figure 5-4 : Illustration de l'application du principe de superposition pour la simulation du comportement en relaxation sous humidité variable et déformation constante. ....	63

Figure 5-5 : Courbes de relaxation à humidité relative variable. ....	64
Figure 5-6 : Essai 1 - courbes de la contrainte réduite (trait bleu), viscoélastique (trait rouge), hygroverrou (trait vert) (a); Évolution de l'humidité relative (b); Déformation imposée (c).....	65
Figure 5-7 : Essai 2 - Courbes de la contrainte réduite (trait bleu), viscoélastique (trait rouge), hygroverrou (trait vert) (a); Évolution de l'humidité relative (b); Déformation imposée (c).....	66
Figure 5-8 : Variations au cours du temps de (a/d) la contrainte hygroverrou expérimentale (trait vert) et la contrainte hygroverrou analytique (trait noir discontinu) (b/e) humidité relative ; (c/f) déformation imposée.....	67
Figure 5-9 – Essai mécanosorptif sous contrainte et humidité variables. ....	68
Figure 5-10 : Courbes contrainte-déformation : du premier demi-cycle(a) ; des trois demi- cycles (b). ....	69
Figure 5-11 : Évolution de la déformation hydrique. ....	70
Figure 5-12 : Illustration du principe de superposition pour la détermination de la déformation visqueuse pour différents niveaux de contrainte et d'humidité relative. ....	71
Figure 5-13 : Évolution du module d'élasticité au cours de l'essai (a) ; Évolution de la déformation élastique (b). ....	73
Figure 5-14 : Évolution de la déformation visqueuse.....	74
Figure 5-15 : Évolution de la déformation hygroverrou au cours de l'essai. ....	74
Figure 5-16 : Décomposition de la déformation totale mesurée durant l'essai mécanosorptif sous contrainte et humidité cycliques. ....	75
Figure 5-17 : Evolution de la déformation hygroverrou au cours du temps.....	76
Figure 5-18 : Evolution de la déformation totale au cours de l'essai. ....	77
Figure 5-19 : Scénarios possibles pour l'évolution de l'état hydrique de l'échantillon au cours d'une variation de $HR$ . ....	77
Figure 5-20 : Courbes de la déformation totale au cours du temps. ....	78
Figure 6-1 : Illustration du comportement sous déformation imposée et teneur en eau variables. .....	84
Figure 6-2 : Illustration du minimum de rigidité. ....	85
Figure 6-3. Discrétisation de la déformation imposée.....	86
Figure 6-4. Illustration de la rigidité minimale pour deux paliers de déformation imposée. ....	87

Figure 6-5 : Modèle hygroverrou couplé avec ressort élastique en série. ....	88
Figure 6-6 : Illustration de l'effet hygroverrou sous chargement et teneur en eau variables .....	88
Figure 6-7. Illustration du module d'élasticité minimum sous chargement constant.....	89
Figure 6-8. Discrétisation de la contrainte.....	89
Figure 6-9 : Modèle hygroverrou couplé avec un ressort élastique en série. ....	90
Figure 6-10 : Modèle de Kelvin généralisé couplé avec ressort hygroverrou et élément hydrique (a) ; Modèle de Maxwell généralisé couplé avec ressort hygroverrou et élément hydrique (b).....	91
Figure 6-11 : Modèles rhéologiques mécanosorptifs basés sur l'hypothèse de partition de la contrainte.....	92
Figure 6-12 : Modèles rhéologiques mécanosorptifs basés sur l'hypothèse de partition de la déformation. ....	92
Figure 6-13 : Modèles à effet hygroverrou viscoélastique (basé sur un modèle de Maxwell)...	95
Figure 6-14 : Modèles à effet hygroverrou viscoélastique (basé sur un modèle de Kelvin).....	95
Figure 6-15 : Modèle de Maxwell généralisé avec ressorts hygroverrous. ....	98
Figure 7-1. Simulation en rigidité : chargement en déformation (a) et teneur en eau (b) variables ; module d'élasticité (c) ; contrainte élastique (d) ; contrainte hygroverrou (e) ; contrainte totale (f). ....	101
Figure 7-2. Simulation de la déformation au cours du temps : composante élastique (a) ; composante hygroverrou (b) ; déformation réduite (c). ....	102
Figure 7-3 : Équivalence des deux approches duales. ....	103
Figure 7-4 : Courbes contraintes-déformations issues de la formulation. ....	103
Figure 7-5. Courbes contraintes-déformations pour différents modes de sollicitation. ....	104
Figure 7-6 : Comparaison des courbes de relaxation simulées (traits discontinus) et des courbes déduites des essais (traits continus). ....	105
Figure 7-7 : Comparaison des courbes de fluage relatif déduites des essais (trait continu) et simulées (trait discontinu) pour différents taux d'humidité relative. ....	105
Figure 7-8 : Courbes de relaxation à humidité constante et variable pour un cycle : « sec » (a) ; « humide » (b). ....	106
Figure 7-9 : Courbes des déformations viscoélastiques expérimentale (trait continu) et simulée (trait discontinu) pour l'essai en contrainte et humidité variables. ....	107



Figure 7-10 : Rondelle de bois vert .....	107
Figure 7-11 : Evolution de la teneur en eau en fonction du temps.....	108
Figure 7-12 : Organigramme de résolution. ....	110
Figure 7-13 : Répartition des contraintes à $t = 14h$ : contraintes radiales (a) ; contraintes circonférentielles (b). ....	111
Figure 7-14 : Distribution de la contrainte circonférentielle le long du rayon R (a) ; évolution de la contrainte circonférentielle aux points P1 à P4 (solutions élastique et viscoélastique) (b) .....	112
Figure 7-15 : Courbes de relaxation analytiques et expérimentales pour : cycle sec (a) ; cycle humide (b). ....	113
Figure 7-16 : Courbes expérimentale, reconstruite et simulée de la déformation totale au cours de l'essai mécanosorptif à humidité relative et contrainte cycliques.....	114

# INTRODUCTION

A l'heure où notre écosystème est confronté à des changements environnementaux significatifs, la communauté scientifique ne cesse de rechercher des solutions susceptibles de ralentir les facteurs qui contribuent à ce phénomène préoccupant. Parmi ces solutions, la sauvegarde de la forêt Amazonienne et du bassin du Congo, véritables poumons de la planète, constitue aujourd'hui un défi majeur. Dans le même esprit, le Massif central est aussi peuplé d'un couvert végétal dense enrichi par des essences comme le Sapin Blanc qui compose près du tiers de cette population et qu'il convient de valoriser de façon rationnelle. Parallèlement, il existe aussi la possibilité de pérenniser les structures bois ou à base de bois dans la mesure où celles-ci peuvent fixer le gaz carbonique reconnu comme un facteur nuisible à notre environnement.

Toutefois l'utilisation du matériau bois comme élément de structure pose des problèmes inhérents à son comportement mécanique très complexe par le fait que les champs mécaniques dépendent du temps et de son état hydrique. Lorsqu'il est soumis à des variations hydriques, il présente en effet un comportement particulier appelé « comportement mécanosorptif » qui traduit un couplage entre les effets du chargement mécanique et les variations de son état hydrique. Les premiers travaux sur ce sujet sont dus à Armstrong et Kingston [ARM 60] qui ont observé que la flèche en flexion était influencée par le mode de variation de l'humidité au cours de la phase de fluage. Depuis cette période, de nombreux auteurs se sont intéressés au phénomène de mécanosorption pour des sollicitations de fluage et/ou de relaxation. Parmi eux, Ranta-Maunus [RAN 75] a mis en évidence le comportement du bois en phase de séchage et d'humidification sous contrainte. Ces travaux ont, entre autres, conduit Gril [GRI 88] à proposer un modèle qui a permis de mettre en évidence un blocage partiel de la déformation lors du séchage sous contrainte, encore appelé effet « hygroverrou ».

Toutefois, la plupart de ces travaux reposent, soit sur des variations d'humidité relative à amplitudes constantes, soit sur des sollicitations constantes ou encore des sollicitations dépassant la limite de linéarité viscoélastique, soit enfin sur des essais effectués avec des échantillons de grandes dimensions, ce qui fait intervenir les effets du gradient hydrique et rend difficile l'interprétation des essais effectués. De plus, très peu d'auteurs [PIT 96] [RAN 03] ont effectué des essais de caractérisation hydrique et mécanique instantanée et différée sur le bois ; l'absence de ce type d'essais complique l'interprétation des essais mécanosorptifs recensés dans la littérature. Par contre, plusieurs auteurs ont développé des modèles analytiques [LEI 71] [TOR 92] pour représenter la mécanosorption sans pour autant prendre en compte l'effet « hygroverrou ». Parallèlement, des auteurs ont proposé des modèles numériques intégrant les effets mécanosorptifs [BOU 03] et hygroverrou [HUS 09] [HUS 11] mais sans proposer de campagnes expérimentales matérialisant ce phénomène. C'est pourquoi, ce phénomène reste mal connu à ce jour et nécessite des essais expérimentaux supplémentaires et des formulations analytiques appropriées pour représenter, modéliser et comprendre le comportement du bois sous chargement et humidité variables.

Dans ce contexte, le présent travail a pour objectif, dans un premier temps, de proposer des essais mécanosorptifs en relaxation et en fluage sous chargement et humidité relative variables. Pour pouvoir interpréter ces résultats, des essais préliminaires de caractérisation des propriétés mécaniques et hydriques ainsi que des essais de fluage et relaxation à différents niveaux d'humidité relative constante sont effectués. Sur la base des résultats obtenus, des modèles rhéologiques représentant le comportement viscoélastique en fonction du niveau d'humidité relative sont proposés. Sur la base du principe de partition de la contrainte et de la déformation, on a pu isoler et mettre ainsi en évidence la contrainte et la déformation hygroverrou pour des essais mécanosorptifs réalisés en relaxation ou en

fluage, respectivement. Dans un deuxième temps, afin de pouvoir formuler mathématiquement les résultats expérimentaux, des modèles rhéologiques représentatifs du comportement mécanosorptif tenant compte de l'effet hygroverrou sont proposés. À l'aide de ces modèles, une loi de comportement mécanosorptif en rigidité est développée sous forme intégrale. Pour l'implémentation numérique du modèle, cette loi de comportement est ensuite exprimée sous forme incrémentale à pas de temps fini.

La première partie de ce mémoire propose une revue bibliographique organisée en deux chapitres. Le premier chapitre vise, tout d'abord, à comprendre le comportement du matériau bois et à mettre en relief ses différentes caractéristiques hydromécaniques à travers l'étude de sa structure à différentes échelles. Il rappelle les principaux aspects de son comportement hygroscopique en décrivant l'effet de l'eau sur sa composition et son comportement. Ensuite, le comportement élastique est rappelé et une revue bibliographie sur les essais viscoélastiques et mécanosorptifs est proposée. Dans le deuxième chapitre, on rappelle la théorie de la viscoélasticité linéaire ainsi que les méthodes d'identification des paramètres des modèles rhéologiques. Ensuite une synthèse bibliographique sur les méthodes analytiques pour la résolution d'un problème viscoélastique est effectuée. Enfin, les modèles analytiques proposés pour la modélisation d'un problème mécanosorptif sont aussi rappelés dans ce chapitre.

La deuxième partie rapporte les résultats d'essais mécanosorptifs sur le Sapin Blanc (*Abies alba* Mill) réalisés grâce à un dispositif expérimental approprié. Cette partie se décompose en trois chapitres : le premier est consacré à la description du dispositif expérimental et du protocole utilisé pour les essais. Le deuxième chapitre, quant à lui, présente des essais préliminaires destinés à caractériser les effets hydriques et mécaniques instantanés dans le bois. Ensuite, des essais de fluage/relaxation sont menés sous humidité constante pour déterminer le comportement viscoélastique du bois ainsi que l'influence de l'état hydrique sur ce dernier. Dans le troisième chapitre, deux essais en relaxation sous déformation imposée constante et humidité relative variable et un essai en fluage sous contrainte et humidité relative variables de façon cyclique, sont exposés. Pour ce dernier essai et en se servant des données issues des essais préliminaires et viscoélastiques, la déformation hygroverrou est isolée sur la base de la partition de la déformation en différenciant les contributions élastique, visqueuse et hydrique. Sur cette base, un modèle analytique est finalement proposé pour la modélisation de cette déformation hygroverrou.

La dernière partie se décompose en deux chapitres. Dans le premier, un modèle pseudo élastique, basé sur les lois de Hooke (en humidification) et de Hooke restreint (en séchage), est formulé en rigidité et en complaisance. Par la suite, plusieurs modèles rhéologiques viscoélastiques mécanosorptifs sont proposés. Les modèles sont classés selon le mode de couplage de leurs effets, basé sur le principe de partition en contrainte ou en déformation. Des lois de comportement basées sur ces modèles analogiques sont formulées sous forme d'équations intégrales et incrémentales, adaptées à la mise en œuvre numérique. Dans le dernier chapitre, des exemples illustratifs démontrent l'équivalence des deux formulations pseudo élastiques formulées en rigidité et en complaisance. Ils sont suivis de la validation des modèles viscoélastiques mécanosorptifs proposés en relaxation et en fluage, par comparaison avec les résultats expérimentaux.

## **PARTIE I : COMPORTEMENT HYDROMECHANIQUE DU BOIS**

### **Chapitre 1 : Le matériau bois**

### **Chapitre 2 : Bases pour la modélisation**



## Chapitre 1. LE MATERIAU BOIS

La xylologie est composée du préfixe xylo- (« bois ») et du suffixe -logie (« discours »), dont la définition est la science du bois, de sa structure et de ses propriétés physiques, mécaniques et chimiques. Il s'agit de la description du bois à toutes les échelles (depuis le tronc ramifié jusqu'à la structure 3D de la paroi cellulaire à l'échelle du nanomètre incluant la description chimique), mais aussi de la mesure de propriétés physiques ou chimiques ainsi que de l'étude des relations entre les paramètres descriptifs du bois.

Le bois possède des particularités structurales par sa nature hygroscopique et son caractère anisotrope et hétérogène qui influencent ses caractéristiques physiques et son comportement hydromécanique. Il est donc essentiel de bien connaître les diverses caractéristiques du bois susceptibles d'influencer son comportement.

### 1.1 Xylologie du bois

#### 1.1.1 La structure du bois

Étant donné la complexité du comportement du bois, notamment lors du changement de l'ambiance extérieure, il est indispensable de connaître ses constituants, sa structure et l'effet des variations hygrométriques ambiantes sur son comportement.

##### 1.1.1.1 Macrostructure

La Figure 1-1 présente la structure d'un tronc d'arbre. On distingue quatre types de bois distincts en se déplaçant de la périphérie vers le centre. On observe d'abord une couche protectrice ou écorce qui entoure le cambium, qui lui, génère l'aubier et transporte la sève. Les anciennes cellules mortes de l'aubier se transforment en duramen ou bois de cœur.

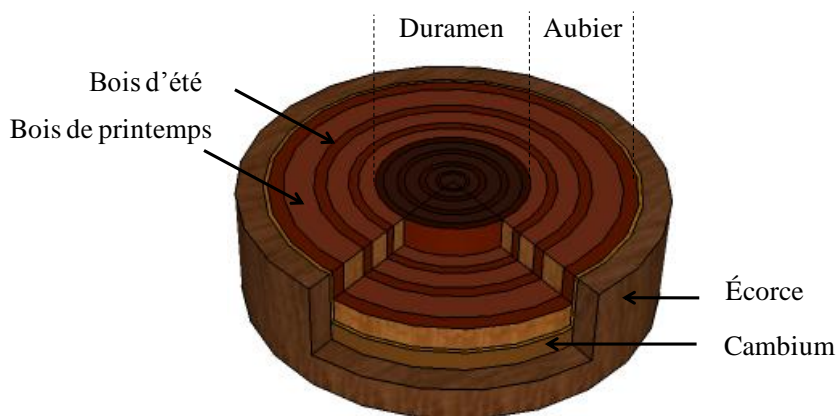


Figure 1-1 : Les différentes parties du tronc d'un arbre.

Chaque année un nouveau cerne de bois d'aubier se forme permettant de connaître l'âge de l'arbre et le type de climat dans lequel il a poussé. On distingue les cernes annuels de croissance par une large bande claire qui correspond au bois de printemps, la partie sombre (foncée) généralement plus étroite correspond au bois d'été (Figure 1-1).

### 1.1.1.2 Microstructure

A l'échelle microscopique, le bois de résineux est constitué principalement de trachéides de forme rectangulaire creuse (Figure 1-2). Ce sont des cellules allongées de 2 à 9 mm de longueur et de l'ordre de 15 à 35  $\mu\text{m}$  dans le sens transversal [NAV 05]. Les trachéides du bois d'été se différencient de celles du bois de printemps par leurs parois épaisses et leur faible diamètre intérieur, ce qui donne au bois d'été une densité et une rigidité plus élevées par rapport au bois de printemps, condition déterminante pour ses propriétés mécaniques et hydriques.

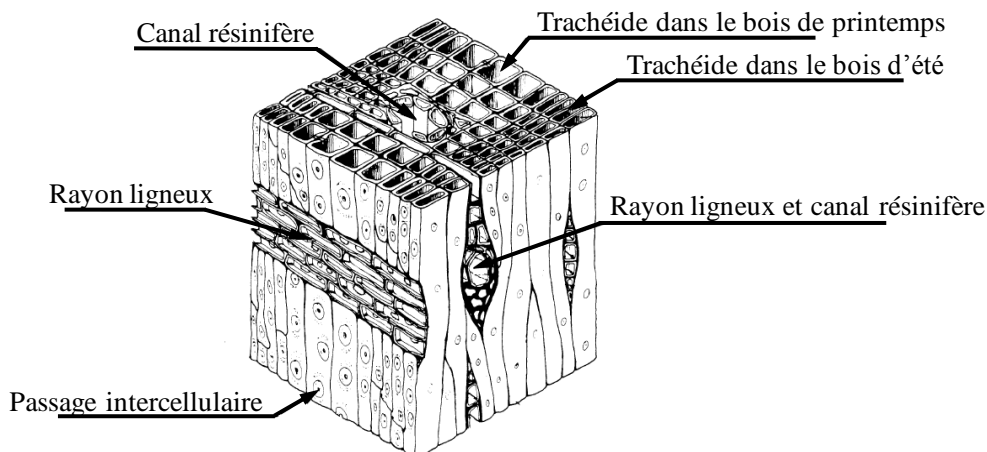


Figure 1-2 : Organisation cellulaire d'un bois résineux [GUI 87].

Le bois présente aussi des canaux résinifères parallèles aux trachéides qui assurent la circulation de la résine. Dans le sens radial, les rayons ligneux assurent transport de la sève (Figure 1-2).

### 1.1.1.3 Ultrastructure

L'observation détaillée d'une structure cellulaire au microscope électronique permet une description détaillée des couches de la paroi cellulaire. Elle se compose d'une paroi primaire P d'épaisseur de l'ordre de 0.1  $\mu\text{m}$  constituée de microfibrilles orientées aléatoirement et qui entoure une paroi secondaire S constituée elle, de trois couches S<sub>1</sub>, S<sub>2</sub> et S<sub>3</sub> (Figure 1-3).

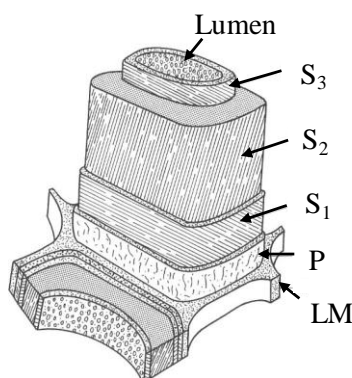


Figure 1-3 : Illustration d'une cellule de bois avec l'organisation des différentes couches de la paroi cellulaire, LM : lamelle mitoyenne, P : paroi primaire, S : paroi secondaire avec ses couches S<sub>1</sub>, S<sub>2</sub> et S<sub>3</sub> [NAV 12].

La couche S<sub>2</sub> représente environ 85% de l'épaisseur totale de la paroi cellulaire. Les microfibrilles, qui constituent cette sous-paroi secondaire, sont orientées sous forme de spirales croisées. C'est dans cette couche S<sub>2</sub> que l'orientation des microfibrilles est déterminante sur les propriétés mécaniques du

bois. Les microfibrilles sont constituées principalement de chaînes de molécules cellulosiques, entourées d'hémicellulose et incrustées dans la lignine.

#### 1.1.1.4 Orientation des éléments du bois

Le bois est un matériau hétérogène et anisotrope. Son hétérogénéité vient du fait qu'il est composé de différents éléments résultant du métabolisme de l'arbre. Pour un arbre, dont la forme peut être considérée comme cylindrique, le tracé circulaire des cernes annuels et l'orientation longitudinale des trachéides donnent au bois un comportement mécanique de nature orthotrope et axisymétrique, d'où l'appellation de matériau orthotrope cylindrique.

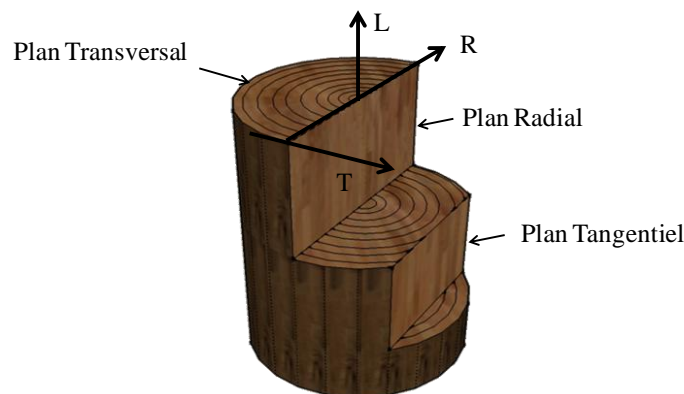


Figure 1-4 : Directions principales dans le bois.

Les trois directions principales (repère d'orthotropie) du bois sont : la direction longitudinale (L), la direction tangentielle (T) et la direction radiale (R), (Figure 1-4).

#### 1.1.2 Hygroscopie du bois

La deuxième particularité du bois est son comportement hygroscopique. Il est important de connaître les paramètres qui le caractérisent ainsi que les différentes formes de présence d'eau dans le bois afin de comprendre son interaction avec son comportement mécanique.

##### 1.1.2.1 Eau dans le bois

Le bois est capable d'absorber et de libérer de l'eau en fonction de l'humidité relative de l'ambiance extérieure. Ce processus se fait jusqu'à un état d'équilibre hydrique. La quantité d'eau ou teneur en eau  $w$  contenue dans le bois est exprimée en % de sa masse à l'état anhydre :

$$w = \frac{\text{masse de l'eau}}{\text{masse de matière anhydre}} \quad (1.1)$$

Cette quantité n'est pas limitée à 100%, le bois peut contenir plus d'eau que de matière, ceci s'explique par la porosité due à l'arrangement des cellules.

On peut trouver l'eau dans le bois sous trois formes [KOL 68] : l'eau de constitution qui entre dans la composition moléculaire du bois ; l'eau dite « hygroscopique » ou « liée » par des liaisons physiques aux parois cellulaires, précisément les chaînes de molécules de la cellulose, de l'hémicellulose et de la lignine ; enfin l'eau dite « libre » que l'on trouve dans les cavités cellulaires ou les micropores.



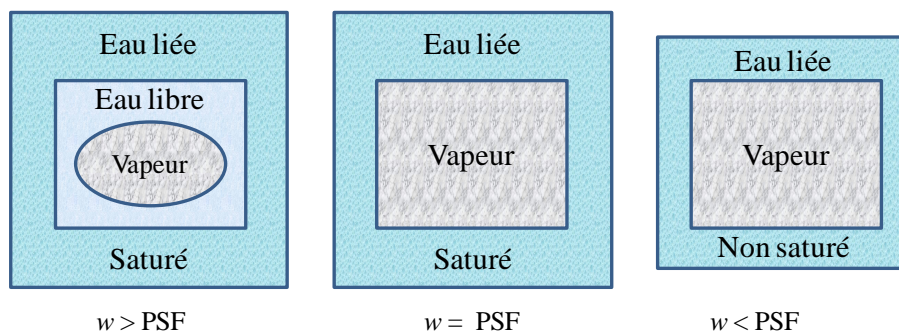


Figure 1-5 : Représentation schématique des trois états de l'eau dans le bois [NAV 05].

Au moment de l'abattage, les cellules du bois vert (lumen) sont partiellement ou totalement remplies d'eau libre : c'est la phase d'évacuation ou phase de ressuyage. Le point de saturation des fibres (PSF) est l'état limite à partir duquel l'eau libre est entièrement évacuée et les parois cellulaires sont saturées d'eau liée. Au dessous du PSF, jusqu'à l'état anhydre, l'eau liée s'évacue en fonction de l'humidité relative de l'air ambiant. Cet intervalle représente le domaine hygroscopique du bois (Figure 1-5).

### 1.1.2.2 Équilibre hydrique et isotherme de sorption

Lors d'un changement de l'humidité relative de l'air ambiant ( $HR$ ), le bois adsorbe ou restitue de l'eau jusqu'à un état d'équilibre hydrique. On entend par sorption, le processus d'adsorption et de désorption d'eau. On trace la courbe « isotherme de sorption » ou « hystérésis de sorption » à partir des valeurs de la teneur en eau du bois à l'état d'équilibre hydrique en fonction de l'humidité relative de l'air ambiant à température constante pour un cycle humidification / séchage (adsorption / désorption), Figure 1-6.

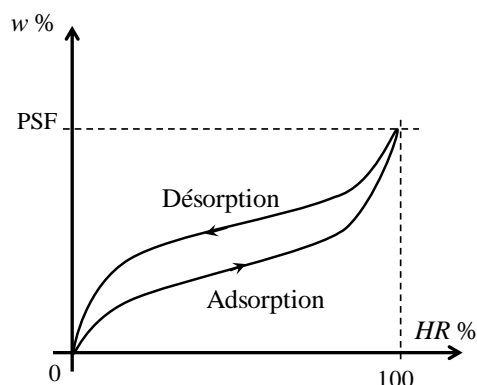


Figure 1-6 : Représentation théorique de l'isotherme de sorption.

On remarque dans ce processus, que pour la même  $HR$ , la teneur en eau mesurée en phase de séchage est supérieure que celle mesurée en phase d'humidification. Le PSF est défini par la teneur en eau du bois en état d'équilibre correspondant à un taux d'humidité relative de 100%.

### 1.1.2.3 Retrait / Gonflement

Les variations de teneur en eau dans le domaine hygroscopique (en dessous du PSF) en humidification (adsorption) ou séchage (désorption) sont accompagnées de variations dimensionnelles importantes correspondant respectivement à un gonflement ou à un retrait. Par

contre, au dessus du PSF, il n'y a pas de variations dimensionnelles constatées. La Figure 1-7 montre la courbe typique du gonflement volumique relatif qui croît jusqu'au PSF et se stabilise ensuite.

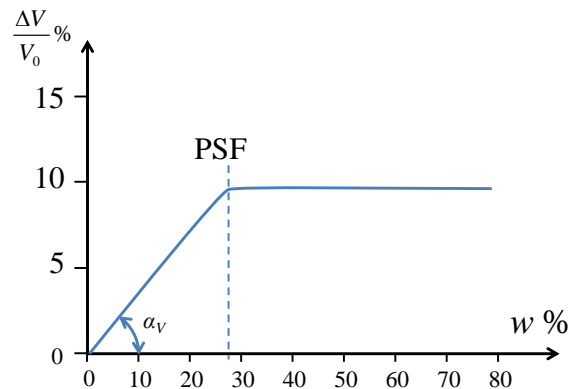


Figure 1-7 : Déformation volumique en fonction de la teneur en eau.

L'anisotropie du bois se retrouve dans le comportement hydrique, ce qui se traduit par des coefficients de gonflement hydrique  $\alpha_i$  dépendant de la direction  $i$  : direction axiale  $\alpha_L$ , direction radiale  $\alpha_R$  et direction tangentielle  $\alpha_T$ . Ces coefficients expriment les variations dimensionnelles relatives du bois pour une variation d'humidité de 1% selon les trois directions précédemment citées. Le retrait/gonflement est très fortement anisotrope : le retrait/gonflement axial est si faible qu'il est pratiquement négligeable, c'est dans la direction tangentielle qu'il est le plus important et environ deux fois plus élevé que dans la direction radiale.

Souvent on considère l'hydro-expansion du bois comme étant linéaire par rapport à sa teneur en eau. Toutefois, la mesure du coefficient hydrique du bois montre que cette linéarité n'est valable que dans une zone de teneur en eau comprise entre 4 et 25 % environ, selon l'essence (Figure 1-8).

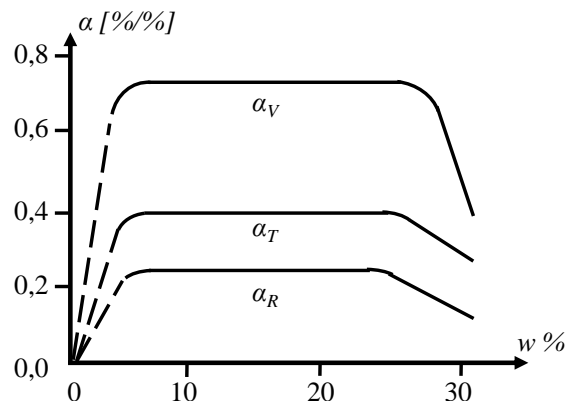


Figure 1-8 : Variation des coefficients de gonflement volumique  $\alpha_V$ , tangentiel  $\alpha_T$  et radial  $\alpha_R$  du bois (bouleau) en fonction de la teneur en eau d'après Keylwerth (1964) cité par [NAV 05].

Du fait de l'anisotropie du bois et de ses différents coefficients de retrait/gonflement, les variations de teneur en eau entraînent des contraintes internes capables de créer des fissurations qui se propagent de l'extérieur vers l'intérieur. La Figure 1-9 montre différentes formes de déformation par retrait et d'orientation des fissures qui dépendent de la position et de l'orientation de l'élément par rapport aux cernes de croissance.

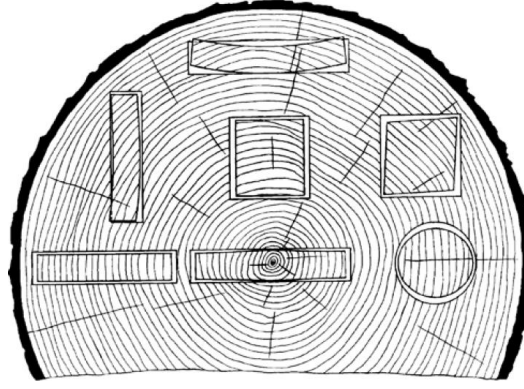


Figure 1-9 : Déformation et fissuration par retrait des pièces en fonction de leur position et leur direction [GRE 10] [DUL 98].

Pour la suite de ce travail, on se placera seulement dans le domaine hygroscopique afin d'étudier les interactions hydromécaniques.

## 1.2 Comportement mécanique du bois

### 1.2.1 Comportement élastique orthotrope

Afin d'adopter les hypothèses des milieux continus, on considère un volume élémentaire représentatif suffisamment grand à l'échelle macroscopique [SIM 10] (ce point sera discuté au chapitre 3). Le comportement instantané du bois sous contrainte modérée est régi par la loi de Hooke qui fournit une relation entre contraintes et déformations sous la forme d'un tenseur d'ordre 4. Compte tenu de l'orthotropie du bois, l'écriture matricielle de la loi de comportement dépend de 9 grandeurs indépendantes : 3 modules d'Young, 3 modules de cisaillement et 3 coefficients de Poisson, soit dans le repère d'orthotropie

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_R \\ \varepsilon_T \\ \varepsilon_L \\ \gamma_{TL} \\ \gamma_{RL} \\ \gamma_{RT} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/E_R & -\nu_{RT}/E_T & -\nu_{RL}/E_L & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{TR}/E_R & 1/E_T & -\nu_{TL}/E_L & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{LR}/E_R & -\nu_{LT}/E_T & 1/E_L & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/G_{TL} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{RL} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{RT} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_R \\ \sigma_T \\ \sigma_L \\ \tau_{TL} \\ \tau_{RL} \\ \tau_{RT} \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

avec

- $\varepsilon_R, \varepsilon_T, \varepsilon_L$  : déformations axiales suivant les directions R, T et L ;
- $\sigma_R, \sigma_T, \sigma_L$  : contraintes normales suivant les directions R, T et L ;
- $\gamma_{TL}, \gamma_{RL}, \gamma_{RT}$  : déformations angulaires dans les plans TL, RL et RT ;
- $\tau_{TL}, \tau_{RL}, \tau_{RT}$  : contraintes de cisaillement dans les plans TL, RL et RT.

On trouve des valeurs indicatives de ces grandeurs pour différentes espèces de façon abondante dans la littérature [KOL 68], [GUI 87], [MOR 94], etc. Il est à noter que la matrice de comportement élastique dépend du repère choisi. Dans la définition ci-dessus, elle est toujours symétrique quelque soit le repère. Par contre, si l'on remplace les  $\gamma_{ij}$  (variations angulaires) par les  $\varepsilon_{ij}$  (distorsions), elle n'est symétrique que dans le seul repère d'orthotropie.

Lorsque le niveau de la sollicitation augmente, le comportement instantané du bois n'est plus linéaire. Plusieurs auteurs ont montré la linéarité du comportement pour des niveaux de chargements jusqu'à 40% [KIN 61] ou 50% [DIN 81], [MUK 83] de la contrainte à rupture. Cette limite varie d'une essence à l'autre et dépend aussi des conditions climatiques de l'essai.

Parmi les influences physiques, les paramètres principaux sont la densité, la teneur en humidité et la température. L'influence de la teneur en eau sur le comportement mécanique du bois est prépondérante. Comme rappelé au paragraphe 1.1.1.3, le bois se compose essentiellement d'hémicellulose qui est un polymère amorphe présentant une grande capacité d'absorption d'humidité, ce qui complique son comportement lors des variations de son état hygroscopique. Plusieurs auteurs ont étudié l'effet de la teneur en eau sur les caractéristiques mécaniques du bois [GOU 68] [KOL 68], [BOD 93], [GER 82] et [BAZ 85]. A titre d'exemple, la Figure 1-10 montre l'effet de la teneur en eau sur le module d'élasticité tangentiel de différentes espèces.

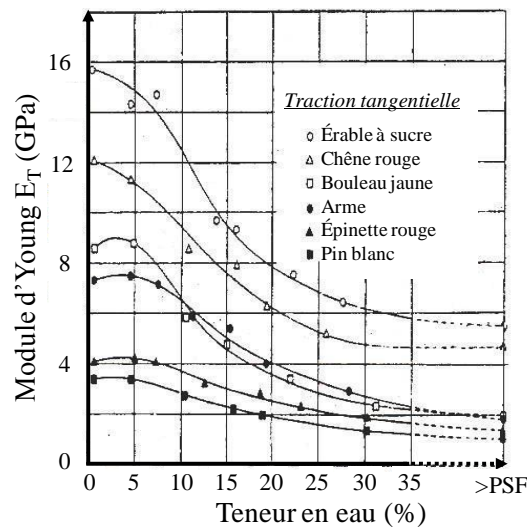


Figure 1-10 : Évolution du module d'Young en fonction de la teneur en eau [GOU 68].

Afin d'exprimer l'effet de la teneur en eau sur les propriétés mécaniques du bois, diverses approches ont été développées [MOU 06] [GUI 87]. La façon la plus simple et la plus directe est d'exprimer le module d'élasticité sous forme d'une fonction linéaire de la teneur en eau et du module d'élasticité à l'état anhydre  $E_0$

$$E = E_0 - c \cdot w \quad \text{avec} \quad w < w_{PSF} \quad (1.3)$$

où  $c$  est une constante. Ainsi, Guitard [GUI 87] a proposé des formules de correction des modules d'élasticité sur une plage de teneur en eau de 6 à 20% à partir des valeurs supposées connues à 12% comme suit

$$\begin{cases} E_L = E_L^{12} [1 - 0,015(w - 12)] \\ E_R = E_R^{12} [1 - 0,030(w - 12)] \\ E_T = E_T^{12} [1 - 0,030(w - 12)] \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} G_{RT} = G_{RT}^{12} [1 - 0,030(w - 12)] \\ G_{TL} = G_{TL}^{12} [1 - 0,030(w - 12)] \\ G_{LR} = G_{LR}^{12} [1 - 0,030(w - 12)] \end{cases} \quad (1.4)$$

### 1.2.2 Comportement viscoélastique à humidité constante

La composition polymérique du bois (cellulose, hémicellulose et lignine) entraîne un comportement viscoélastique. Ce comportement se manifeste soit par l'augmentation de la déformation au cours du temps sous contrainte constante (fluage), soit par la relaxation de la contrainte au cours du temps sous

déformation constante. Il se caractérise par sa dépendance au temps et dépend de plusieurs facteurs tels que l'ambiance externe (température et humidité relative), le niveau et l'histoire de sollicitation, l'anisotropie, la direction et le type de chargement. Dans ce paragraphe on passe en revue le comportement viscoélastique du bois dans la littérature ; on examinera les formulations analytiques au chapitre 2.

L'étude du comportement viscoélastique a fait l'objet de nombreux travaux expérimentaux (voir par exemple [CAR 87] [MOR 94] [PIT 96]). Généralement, les essais les plus fréquents sont des essais de fluage [MUK 83], les essais de relaxation ne sont pas très abondants dans la littérature. La difficulté principale de ces essais sur le matériau bois est d'assurer une ambiance stable durant la durée de l'essai.

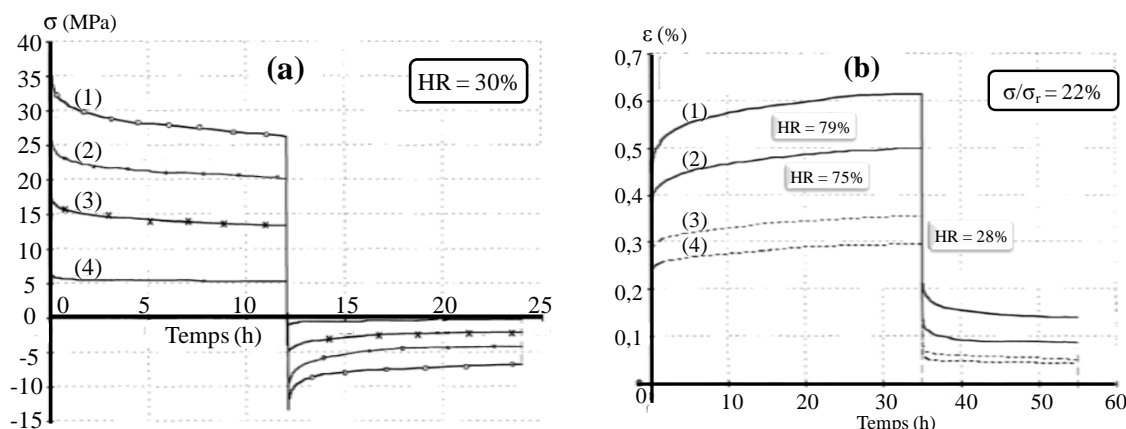


Figure 1-11 : (a) Essais de relaxation/effacement à HR constante pour différents paliers de déformation imposée ; (b) essais de fluage/recouvrance en contrainte imposée pour différents taux d'humidité relative [PIT 96].

Les essais ont montré que le bois flue différemment selon ses directions privilégiées [FRO 12]. Le fluage est proportionnellement plus important selon la direction transversale que dans la direction longitudinale [RAN 93].

Les essais à différents niveaux de sollicitation dans une ambiance climatique stable modérée (température et humidité relative) montrent que le bois, jusqu'à une certaine limite de chargement, présente un comportement viscoélastique linéaire. Ainsi, Pittet [PIT 96] a fait des essais en relaxation/effacement à humidité relative constante et en déformation imposée exprimée en fonction de la charge de rupture (Figure 1-11(a)). Cependant ces données expérimentales restent très localisées pour chaque essence de bois au regard de la grande dispersion des résultats en fonction de la position et de l'orientation de l'échantillon par rapport au centre de l'arbre [DIN 81]. Généralement la limite de linéarité est exprimée en fonction de la contrainte de rupture. Plusieurs auteurs ont fait des expériences pour la détermination des limites de linéarité viscoélastique. Hunt et Shelton [HUN 88] considèrent que la limite de linéarité de fluage est de l'ordre de 10% à 20% de la contrainte de rupture en compression et de 20% à 30% de la contrainte de rupture en traction et en flexion.

Un autre paramètre influence le comportement viscoélastique du bois : la teneur en eau. Dans la littérature, on distingue deux effets différents : le comportement viscoélastique pour un état hydrique stable et le comportement viscoélastique lors d'une variation de la teneur en eau. Les essais réalisés par Pittet [PIT 96], présentés à la Figure 1-11(b), montrent la forte influence du taux d'humidité relative sur l'amplitude de la déformation dans des essais de fluage/recouvrance pour un même

niveau de chargement. L'effet de la variation de l'état hydrique sur le comportement différé fera l'objet du prochain paragraphe.

### 1.2.3 Comportement viscoélastique à humidité variable

#### 1.2.3.1 Le comportement mécanosorptif

On a vu dans ce qui précède que le comportement mécanique du bois à court et à long terme dépend de l'état hydrique dans lequel il se trouve. De fait, le bois, soumis aux chargements mécaniques et aux variations hydriques, présente un comportement particulier dû aux effets mécanosorptifs qui représentent la réponse du couplage hydromécanique.

Le bois est le premier matériau pour lequel le phénomène de mécanosorption au sens large a été observé. Cependant, il existe également pour d'autres matériaux tels que les matériaux à base de bois [ARM 72] [MAR 88] [MAR 90] dont le comportement présente des similitudes avec celui du béton en phase de maturation [BAZ 85].

Les études de la mécanosorption dans le bois ne sont pas récentes, les premiers travaux datant du début des années 60. Entre autres, Armstrong et Kingston ont constaté dans un essai de flexion une différence entre la flèche de fluage dans un climat constant et le fluage pendant le séchage [ARM 60]. Ces travaux ont été suivis par des essais de fluage réalisés par Armstrong et Christensen [ARM 61] dans un climat cyclique (humidification/séchage). Leurs résultats confirment l'amplification du fluage en présence de variations de la teneur en eau (Figure 1-12). En outre, cette étude a confirmé que la variation totale de la déformation dépend du taux et de la nature de la variation de teneur en eau indépendamment de la vitesse de variation. Cette indépendance a été confirmée par les essais de Pittet [PIT 96]. Toutefois, Hunt et Gril [HUN 96] ont montré qu'il existe une légère influence du temps sur l'effet mécanosorptif, par la comparaison des courbes de fluage d'échantillons sous des cycles d'humidité rapides et lents.

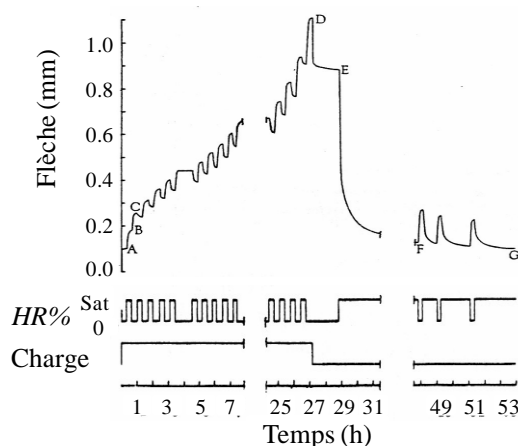


Figure 1-12 : Effet de la variation de la teneur en eau sur le fluage de la flèche sous chargement constant [ARM 61].

En 1962, Armstrong et Kingston continuèrent leurs travaux sur des résineux et des feuillus [ARM 62] en effectuant des essais en compression et en traction. Ils ont constaté que l'effet de la variation de la teneur en eau est plus marqué en compression qu'en traction. De plus, il existe plusieurs autres travaux dans la littérature qui confirment ce dernier résultat [MAR 90] [TOR 00]. Par ailleurs, Hearmon et Paton [HEA 64] ont également observé l'effet mécanosorptif en cisaillement.

Jusqu'à la fin des années 60, la mécanosorption n'a été étudiée que dans le sens longitudinal du bois. Perkitny et Kingston [PER 72] ont observé l'effet mécanosorptif dans le plan transversal dans le cas du fluage et de la relaxation. Ranta-Maunus [RAN 93] confirme à partir d'essais de traction, de compression et de flexion, que le fluage mécanosorptif en direction transversale est plus marqué que celui en direction longitudinale. Par la suite, d'autres auteurs ont également effectué des essais dans le sens transversal [TOR 00], [BAR 01], [FRO 12].

En 1964 Hearmon et Paton [HEA 64] ont observé via des essais de flexion 3 points, l'influence du taux de chargement sur le fluage mécanosorptif. Ainsi, pour un chargement à  $3/8^{\text{ème}}$  de la contrainte à rupture, l'effet de la mécanosorption entraîne la rupture prématurée de l'échantillon après des cycles d'humidité relative variant entre l'état sec et 93% d'humidité relative. Pour un chargement à  $1/8^{\text{ème}}$  de la contrainte de rupture, la courbe tend à se stabiliser, Figure 1-13. Cette expérience met en évidence la notion de limite de linéarité mécanosorptive.

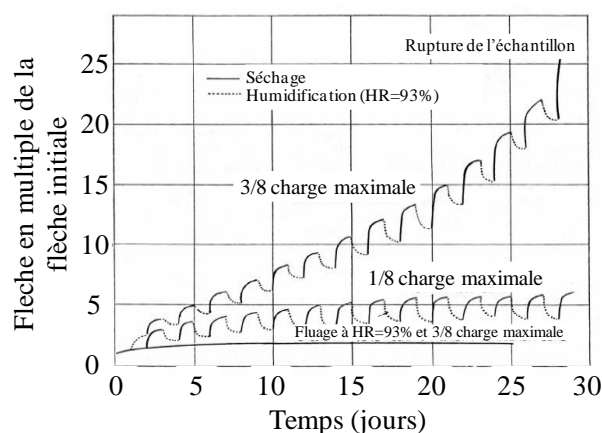


Figure 1-13 : Évolution de la réponse différée sous environnement constant (93%HR) et variable pour deux niveaux de chargement en flexion [HEA 64].

L'interprétation de la mécanosorption à l'échelle moléculaire s'explique par la rupture de liaisons hydrogènes lors de l'application d'une sollicitation mécanique. Ceci permet un mouvement des chaînes de cellulose dans le sens de l'application de la charge, puis de nouvelles liaisons hydrogènes se reforment sur de nouveaux sites. Ce processus de rupture et de reformation se propage, donnant lieu à une déformation différée. Lors d'une variation de teneur en eau, le même processus se produit, et pour la même variation de teneur en eau, les liaisons hydrogènes se rompent et se reforment [HUN 84] [HAN 95].

Depuis, le phénomène de mécanosorption a fait l'objet de nombreuses études expérimentales qui ont donné d'importants acquis scientifiques en fluage [GRI 88], [RAN 03], etc. ou en fluage et relaxation [PIT 96]. Une mine d'informations existe sur le comportement mécanosorptif et plusieurs auteurs ont fait l'état de l'art sur les travaux établis jusqu'à ce jour.

De façon générale, quelque soit le type de sollicitation (traction, compression ou flexion), pour une courbe de fluage du bois sous des cycles hydriques de même amplitude, il a été constaté qu'une désorption entraîne une augmentation de la déformation et qu'une adsorption entraîne généralement une faible diminution de la déformation à l'exception de la première adsorption qui induit une augmentation de la déformation.

### 1.2.3.2 Trajectoire de mécanosorption et limite du fluage

Armstrong et Kingston [ARM 62] ont montré que la mécanosorption ne dépend pas directement du temps, mais plutôt de la variation de teneur en eau en fonction du temps. En se basant sur cette hypothèse, Hunt [HUN 84] a proposé de présenter la courbe mécanosorptive dans les axes de la complaisance et de la teneur en eau (Figure 1-14). La complaisance représente ici la déformation totale diminuée de la déformation hydrique libre (retrait ou gonflement) et divisée par la contrainte.

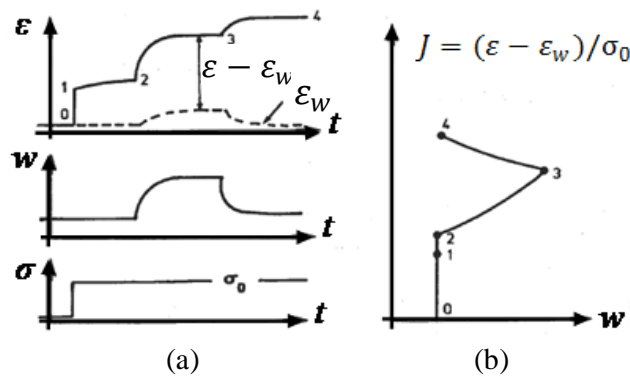


Figure 1-14 : Construction de la trajectoire mécanosorptive : déformation totale  $\varepsilon$ , déformation hydrique  $\varepsilon_w$  et contrainte  $\sigma$  en fonction du temps (a) ; trajectoire mécanosorptive (b) [GRI 88].

En 1992, Hunt [HUN 92], à la suite de plusieurs travaux, confirme le résultat de Hearmon et Paton [HEA 64] sous sollicitation modérée et amplitude des cycles de teneur en eau constante, selon lequel la déformation du bois tend vers une valeur limite lorsque le nombre des cycles augmente. Ceci apparaît clairement sur la trajectoire mécanosorptive où les droites tendent à se superposer (Figure 1-15). Cette notion de fluage limite est observée dans le cas de sollicitation en compression et en traction [HUN 87a], [HUN 88].

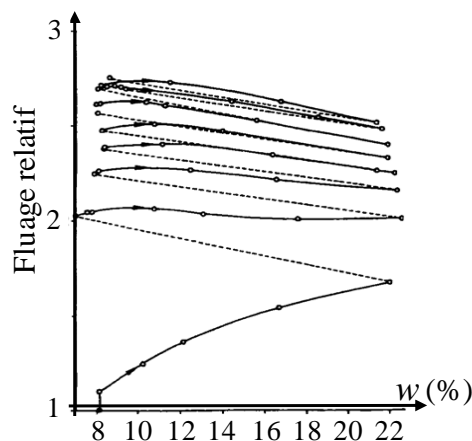


Figure 1-15 : Courbe de sorption montrant le fluage limite [HUN 92].

Par contre, les essais de flexion réalisés par Mohager et Toratti [MOH 93] avec des cycles d'humidité relative entre 90% et 15% durant presque 4 ans ne montrent pas l'existence d'une valeur limite (Figure 1-16). Ceci est peut-être dû à la dimension relativement grande des poutres (10 x 10 mm<sup>2</sup>) qui peut avoir un effet supplémentaire dû au gradient d'humidité, d'où la difficulté de se prononcer sur ces résultats concernant l'existence du fluage limite.



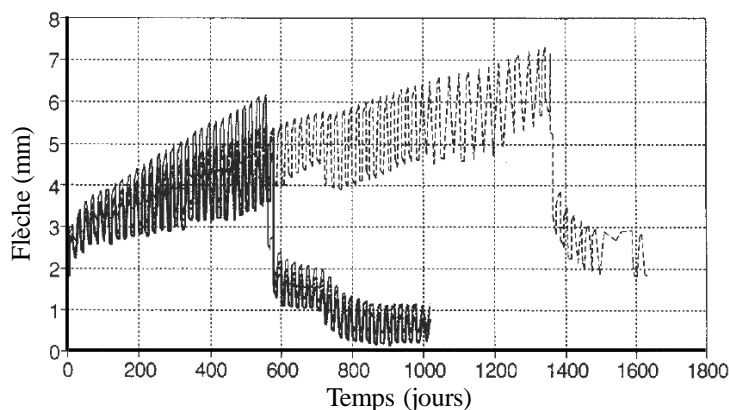


Figure 1-16 : Évolution de la flèche au cours du temps d'échantillons soumis à des cycles d'humidité relative entre 15% et 90% [MOH 93].

### 1.2.3.3 Le seuil mécanosorptif

Il est généralement observé que dans un essai de fluage, la première adsorption sous chargement est marquée par une augmentation de déformation. Cet aspect apparaît bien sur la Figure 1-17 (b) qui représente deux trajectoires mécanosorptives d'essais de flexion 4 points dans le sens des fibres [GRI 88]. L'échantillon (A) est chargé à un état humide et l'échantillon (B) est chargé à un état sec (Figure 1-17 (a)). La complaisance  $J$  a été corrigée pour tenir compte de la réduction de la section transversale lors de la variation de l'humidité relative. Le système de notation adopté ( $\pm$ ) est celui proposé par Ranta-Maunus [RAN 75] et qui signifie : (++) première humidification, (+) réhumidification, (-) séchage.

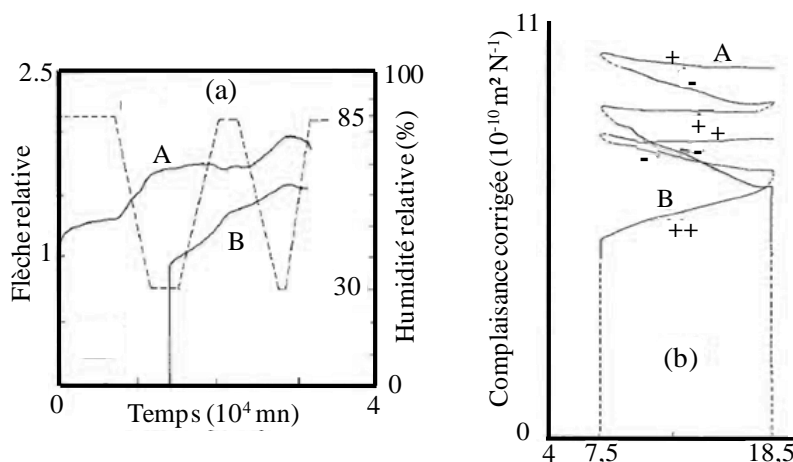


Figure 1-17 : Humidité relative (trait discontinu) et flèche relative (trait continu) en fonction du temps (a) ; trajectoires mécanosorptives (b) [GRI 88].

Hunt [HUN 84] a présenté une campagne d'essais correspondant à des cycles d'humidité relative d'amplitude croissante (Figure 1-18 (a)). Le résultat marquant est l'existence d'un seuil de complaisance pour lequel la trajectoire change de pente, entraînant le passage de l'état (+) à l'état (++) . Ce seuil correspond au maximum de complaisance atteint depuis le début du chargement (threshold compliance) [HUN 84].

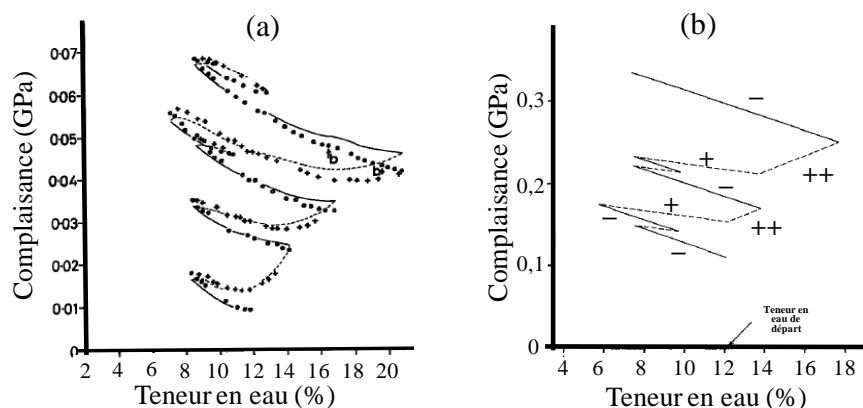


Figure 1-18 : Trajectoires mécanosorptives : résultat expérimental brut (ligne continue), résultat corrigé pour tenir compte de la réduction de la section transversale (ligne pointillée) [HUN 87] (a) ; illustration par l'utilisation de la notation (+) [HUN 84] (b).

Toutefois, on ne peut pas généraliser cette notion de compliance seuil dans le cas d'un chargement variable en contrainte.

Récemment des essais mécanosorptifs établis par Montero [MON 12] pour deux séries d'échantillons chargés à différents niveaux d'humidité présentaient la même réponse totale après plusieurs cycles d'humidité sous contrainte, Figure 1-19. Les deux trajectoires mécanosorptives confirment la présence d'une limite de fluage après quelques cycles d'humidité à amplitude constante. On remarque aussi la présence de l'effet (++) sur la Figure 1-19 (a).

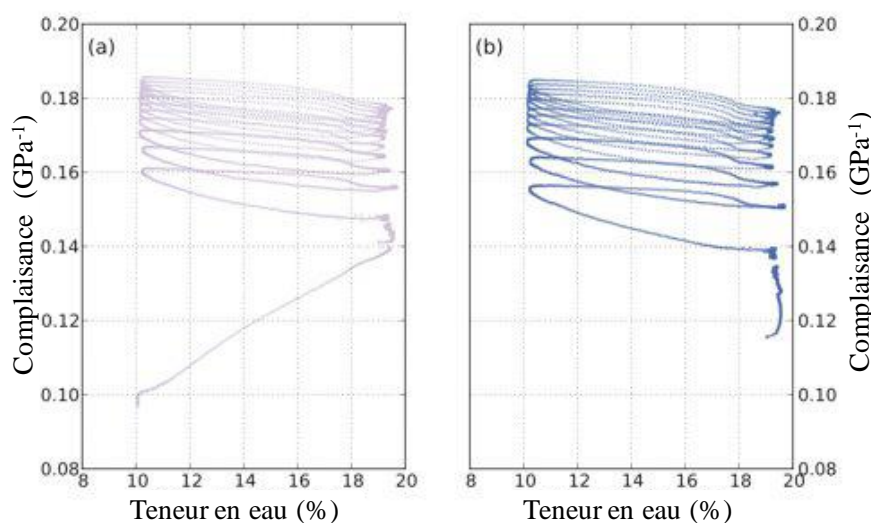


Figure 1-19 : Comparaison de trajectoires mécanosorptives : (a) à un état sec (HR=40%) ; (b) à un état humide (HR=92%) [MON 12].

Le rapprochement des deux limites correspondant à deux essais de chargement à l'état humide et à l'état sec, montre l'atténuation du phénomène particulier désigné comme l'effet (++) qui indique une mécanosorption particulière.

#### 1.2.4 Conclusion

A travers cette bibliographie sur le comportement du bois en fonction de son état hydrique, il apparaît que le comportement du bois dépend essentiellement des paramètres suivants :

- Ses caractéristiques mécaniques ;
- L'histoire et le niveau du chargement mécanique ;
- L'état hydrique et son histoire sous chargement ;
- Le temps.

D'une manière générale, le comportement du bois sous l'action simultanée d'un chargement mécanique et d'une variation de teneur en eau s'avère d'une grande complexité (comportement mécanosorptif). Les données de la littérature rapportées ci-dessus montrent que la mécanosorption regroupe deux phénomènes essentiels à savoir : l'amplification du fluage sous l'effet des cycles d'humidité et l'effet seuil mécanosorptif activé par une augmentation de l'amplitude du cycle d'humidité.

Les données de la littérature sont très variées en termes de types et de conditions d'essai, de dimensions des échantillons, de niveau et de mode de chargement, etc. Leur interprétation nécessite des modèles analytiques permettant de décrire le comportement mécanosorptif. Par ailleurs, il existe d'autres paramètres (ex. la température, l'endommagement...) qui ne seront pas pris en considération dans la suite de ce travail.

## Chapitre 2. BASES POUR LA MODELISATION

Comme constaté au chapitre 1, la modélisation du comportement viscoélastique du bois sous climat constant est une étape indispensable pour construire un modèle mécanosorptif viscoélastique sous ambiance et chargement variables.

### 2.1 Théorie de la viscoélasticité linéaire

On entend par viscoélasticité un comportement mécanique réversible fonction du temps. Dans le cas de la viscoélasticité isotherme, on remarque sur le diagramme contrainte-déformation, des boucles d'hystérésis qui apparaissent lors d'un chargement cyclique.

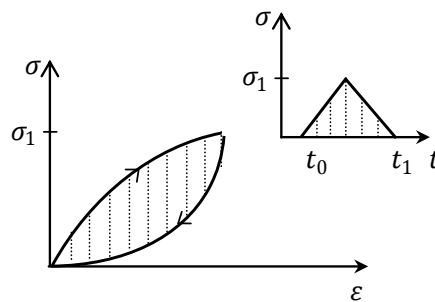


Figure 2-1 : Courbe d'hystérésis d'un matériau viscoélastique.

L'aire de cette boucle représente l'énergie dissipée au cours du cycle. Ceci indique que, même si la réponse à une sollicitation donnée est réversible, le comportement viscoélastique est dissipatif.

#### 2.1.1 Tenseurs de retard et de relaxation

Les deux expériences fondamentales qui permettent de caractériser le comportement viscoélastique sont les essais de fluage (ou essai de retard) et de relaxation. Comme indiqué au §1.2.2, dans un essai de fluage uniaxial, la déformation d'un échantillon viscoélastique évolue au cours du temps sous contrainte maintenue constante  $\sigma_0$ . Après suppression de la contrainte, le retour vers l'état de déformation initiale nulle s'effectue de manière progressive (Figure 2-2(a)).

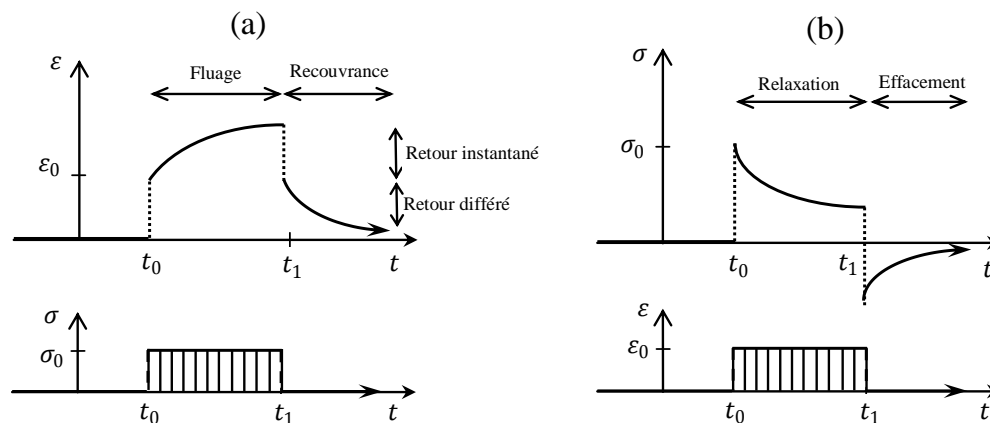


Figure 2-2 : Essai de fluage-recouvrance (a) ; essai de relaxation-effacement (b).

La forme duale est obtenue par l'essai de relaxation uniaxiale qui consiste à observer la décroissance de la contrainte dans un échantillon soumis à une déformation constante  $\varepsilon_0$ . L'essai d'effacement consiste à annuler la déformation à partir d'un temps  $t_1$ . On observe alors un retour progressif de la contrainte à sa valeur initiale nulle (Figure 2-2 (b)).

Le comportement viscoélastique s'exprime dans le cadre de la thermodynamique par le biais de la première loi d'état et de la première loi complémentaire. Dans l'hypothèse d'une transformation isotherme ( $\dot{T} = 0$ ), les variables à considérer sont le tenseur de déformation  $\boldsymbol{\varepsilon}$  et sa variable associée, le tenseur de contrainte  $\boldsymbol{\sigma}$ . Si on note  $\psi^*(\boldsymbol{\sigma})$  le potentiel thermodynamique dual et  $\phi^*(\boldsymbol{\sigma})$  le potentiel de dissipation dual, la réponse  $\boldsymbol{\varepsilon}(t)$  à l'expérience de fluage satisfait aux formes duales de la première loi d'état et de la première loi complémentaire :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{d\psi^*}{d\boldsymbol{\sigma}} \text{ soit } \varepsilon_{ij} = \frac{d\psi^*}{d\sigma_{ij}} \text{ avec } \psi^* = \psi^*(\boldsymbol{\sigma}) \quad (2.1)$$

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{d\phi^*}{d\boldsymbol{\sigma}} \text{ soit } \dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{d\phi^*}{d\sigma_{ij}} \text{ avec } \phi^* = \phi^*(\boldsymbol{\sigma}) \quad (2.2)$$

L'ensemble de ces lois constitue un système d'équations différentielles dont la solution générale peut s'écrire pour un palier de contrainte imposée  $\boldsymbol{\sigma}_0$  :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(t) = \mathbf{J}(t_0, t, \boldsymbol{\sigma}_0) : \boldsymbol{\sigma}_0 \text{ pour } t \geq t_0 \quad (2.3)$$

$\mathbf{J}$  étant un tenseur d'ordre 4, appelé « tenseur de retard », dont les composantes  $J_{ijkl}(t_0, t, \sigma_{0,kl})$  dépendent dans le cas général du niveau  $\boldsymbol{\sigma}_0$  de la sollicitation, au travers de ses composantes  $\sigma_{0,kl}$ .

De même, la première loi d'état et la première loi complémentaire définissent un système d'équations différentielles où  $\psi(\boldsymbol{\varepsilon})$  et  $\phi(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}})$  sont cette fois le potentiel thermodynamique et le potentiel de dissipation

$$\boldsymbol{\sigma} = \rho \frac{d\psi}{d\boldsymbol{\varepsilon}} \text{ soit } \sigma_{ij} = \rho \frac{d\psi}{d\varepsilon_{ij}} \text{ avec } \psi = \psi(\boldsymbol{\varepsilon}) \quad (2.4)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{d\phi}{d\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}} \text{ soit } \sigma_{ij} = \frac{d\phi}{d\dot{\varepsilon}_{ij}} \text{ avec } \phi = \phi(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}) \quad (2.5)$$

dont la solution pour un palier de déformation imposé constant constitue la réponse  $\boldsymbol{\sigma}(t)$  à l'essai de relaxation :

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \mathbf{R}(t_0, t, \boldsymbol{\varepsilon}_0) : \boldsymbol{\varepsilon}_0 \text{ pour } t \geq t_0 \quad (2.6)$$

$\mathbf{R}$  étant le tenseur d'ordre 4, appelé « tenseur de relaxation », dont les composantes  $R_{ijkl}(t_0, t, \varepsilon_{0,kl})$  dépendent dans le cas général du niveau  $\boldsymbol{\varepsilon}_0$  de la sollicitation au travers de ses composantes  $\varepsilon_{0,kl}$ .

### 2.1.2 Milieu viscoélastique linéaire

Un système est dit linéaire si à une combinaison linéaire de deux excitations quelconques correspond la combinaison linéaire homologue des deux réponses élémentaires correspondantes (principe de superposition). On montre ainsi que l'hypothèse de la linéarité implique que les composantes du tenseur de retard soient indépendantes du niveau de la sollicitation et que les composantes du tenseur de relaxation soient indépendantes de l'état de la déformation imposée. Par conséquent, les réponses à l'essai de retard et à l'essai de relaxation s'écrivent respectivement dans ce cas

$$\forall t \geq t_0 : \begin{cases} \boldsymbol{\varepsilon}(t) = \mathbf{J}(t, t_0) : \boldsymbol{\sigma}_0 \\ \boldsymbol{\sigma}(t) = \mathbf{R}(t, t_0) : \boldsymbol{\varepsilon}_0 \end{cases} \quad (2.7)$$

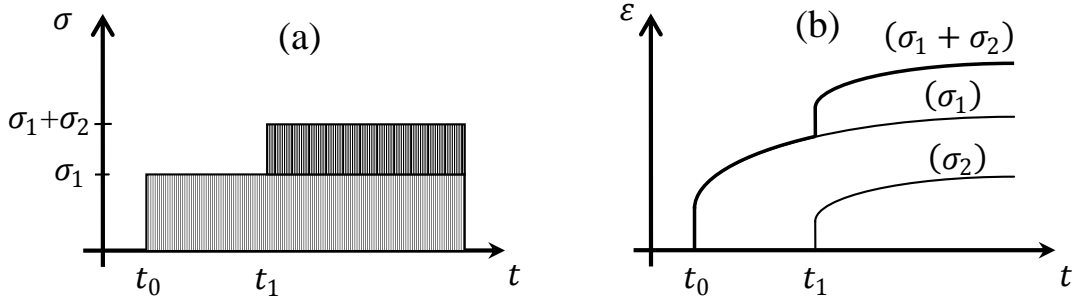


Figure 2-3 : Comportement viscoélastique linéaire - principe de superposition de Boltzmann.

Cette propriété de linéarité correspond au principe de superposition de Boltzmann qui permet d'écrire la réponse en déformation  $\varepsilon(t)$  à  $n$  paliers de chargement  $(\sigma_1, \sigma_2 \dots \sigma_n)$  sous une forme discrète (Figure 2-3)

$$\varepsilon(t) = \sum_{i=0}^n H(t - t_0) J(t, t_i) : \sigma_i \text{ et } \sigma(t) = \sum_{i=0}^n H(t - t_0) R(t, t_i) : \varepsilon_i \quad (2.8)$$

où  $H$  la fonction d'Heaviside. La généralisation de ce principe, dans le cas d'une sollicitation continûment variable à partir d'un chargement initial  $\sigma(t_0)$ , donne la loi de comportement viscoélastique écrite en fluage sous forme de l'équation intégrale de Boltzmann

$$\varepsilon(t) = J(t, t_0) \sigma(t_0) + \int_{t_0}^t J(t, \tau) \dot{\sigma}(\tau) d\tau \quad (2.9)$$

De même pour l'approche en relaxation, la réponse à une déformation continûment variable, à partir d'une valeur initiale  $\varepsilon(t_0)$ , s'écrit

$$\sigma(t) = R(t, t_0) \varepsilon(t_0) + \int_{t_0}^t R(t, \tau) \dot{\varepsilon}(\tau) d\tau \quad (2.10)$$

L'intégration par partie de ces deux formes de l'équation de Boltzmann (2.9) et (2.10) permet de les mettre sous la forme d'équations intégrales de Volterra

$$\begin{cases} \varepsilon(t) = J(t, t) \sigma(t) - \int_{t_0}^t \frac{\partial J(t, \tau)}{\partial \tau} \sigma(\tau) d\tau \\ \sigma(t) = R(t, t) \varepsilon(t) - \int_{t_0}^t \frac{\partial R(t, \tau)}{\partial \tau} \varepsilon(\tau) d\tau \end{cases} \quad (2.11)$$

Les deux équations (2.11) se décomposent en deux termes avec l'interprétation physique suivante : le premier terme exprime la réponse instantanée à la sollicitation à l'instant  $t$  actuel ; le second terme exprime un effet de mémoire évanescence de toute l'histoire passée de la sollicitation jusqu'à l'instant  $t$  actuel, il traduit donc l'effet de comportement différé du matériau [SAL 09].

Les relations précédentes se généralisent aisément au cas tridimensionnel en appliquant le principe de superposition de Boltzmann pour chaque composante  $\sigma_{ij}$  ou  $\varepsilon_{ij}$  de la sollicitation, d'où :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(t) = \mathbf{J}(t, t_0) : \boldsymbol{\sigma}(t_0) + \int_{t_0}^t \mathbf{J}(t, \tau) : \dot{\boldsymbol{\sigma}}(\tau) d\tau \quad (2.12)$$

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \mathbf{R}(t, t_0) : \boldsymbol{\varepsilon}(t_0) + \int_{t_0}^t \mathbf{R}(t, \tau) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(\tau) d\tau \quad (2.13)$$

### 2.1.3 Modèles analogiques

Dans le cadre thermodynamique, on distingue deux hypothèses : partition de la contrainte ou partition de la déformation [LEM 09] [DES 96]. Dans la première hypothèse de partition de la contrainte ( $\sigma = \sigma^e + \sigma^{an}$ ), on note que  $\sigma^e : \dot{\epsilon}$  représente la puissance volumique réversible et  $\sigma^{an} : \dot{\epsilon}$  représente la dissipation volumique anélastique.

Pour construire une loi viscoélastique linéaire, on adopte le même potentiel thermodynamique  $\psi$  que celui de l'élasticité linéaire. Quant à la contrainte anélastique  $\sigma^{an}$ , on introduit un potentiel de dissipation  $\varphi$ , fonction de la vitesse de déformation, soit

$$\rho\psi = \frac{1}{2}\epsilon : A : \epsilon \quad \text{et} \quad \varphi = \frac{1}{2}\dot{\epsilon} : V : \dot{\epsilon} \quad (2.14)$$

où  $V$  est appelé le tenseur de viscosité. En appliquant la 1<sup>ère</sup> loi d'état et la 1<sup>ère</sup> loi complémentaire et compte tenu du principe de partition de la contrainte, on obtient

$$\sigma = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \epsilon} + \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{\epsilon}} = A : \epsilon + V : \dot{\epsilon} \quad (2.15)$$

On utilise le même raisonnement pour la deuxième hypothèse de partition de la déformation, en considérant la déformation totale  $\epsilon$  comme variable observable et la déformation  $\epsilon^{an}$  comme variable cachée. On note  $\sigma : \dot{\epsilon}^e$  la puissance volumique réversible et  $\sigma : \dot{\epsilon}^{an}$  la dissipation volumique intrinsèque. L'enthalpie libre de Gibbs et la forme duale du potentiel de dissipation sont données par les expressions suivantes

$$\rho\psi^* = \frac{1}{2}\sigma : A^{-1} : \sigma \quad \text{et} \quad \varphi^* = \frac{1}{2}\sigma : V^{-1} : \sigma \quad (2.16)$$

En prenant en compte les formes duales de la première loi d'état et de la première loi complémentaire, la partition de la déformation s'écrit

$$\dot{\epsilon} = A^{-1} : \dot{\sigma} + V^{-1} : \sigma \quad (2.17)$$

Les formes des équations différentielles (2.15) et (2.17) sont analogues aux équations représentatives des modèles rhéologiques de Kelvin-Voigt et de Maxwell respectivement :

$$\sigma = E\epsilon + \eta\dot{\epsilon} \quad (\text{modèle de Kelvin-Voigt – partition de la contrainte}) \quad (2.18)$$

$$\dot{\epsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\sigma}{\eta} \quad (\text{modèle de Maxwell – partition de la déformation}) \quad (2.19)$$

Ces modèles rhéologiques fournissent donc un support analogique pour modéliser les matériaux viscoélastiques par la combinaison de ressorts (modèle de Hooke) et de pistons (modèle de Newton) montés en série (Maxwell) ou en parallèle (Kelvin-Voigt).

Dans le cas d'une approche en rigidité, il est commode, pour mieux représenter le comportement d'un solide, d'associer une ou plusieurs branches de Maxwell en parallèle. L'absence de piston dans la première branche permet d'assurer l'existence d'une asymptote horizontale différente de zéro en relaxation, ce qui distingue un milieu solide viscoélastique d'un milieu fluide.

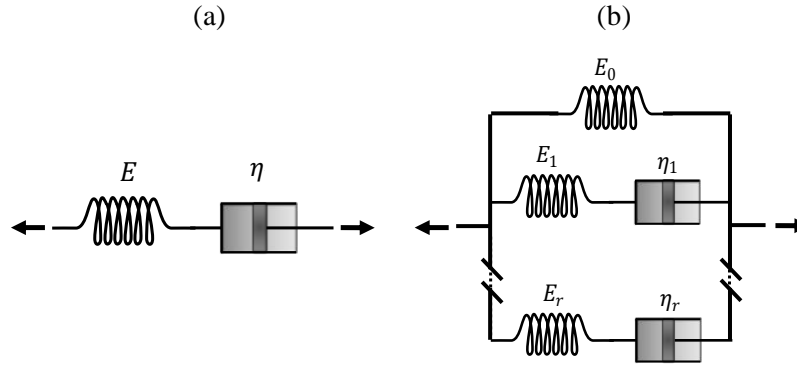


Figure 2-4 : Modèle de Maxwell (a) ; modèle de Maxwell généralisé (b).

La résolution de l'équation différentielle (2.19) pour une histoire de déformation uniaxiale imposée  $\varepsilon(t)$  quelconque sur  $[t_0 ; t]$ , dans le cas général où les paramètres  $E$  et  $\eta$  dépendent du temps, conduit à

$$\sigma(t) = \sigma(t_0) e^{-\int_{t_0}^t \frac{E(\xi)}{\eta(\xi)} d\xi} + \int_{t_0}^t E(\tau) e^{-\int_{\tau}^t \frac{E(\xi)}{\eta(\xi)} d\xi} \dot{\varepsilon}(\tau) d\tau \quad \text{avec} \quad \sigma(t_0) = E(t_0) \varepsilon(t_0) \quad (2.20)$$

Par analogie avec l'équation intégrale de Boltzmann en relaxation (2.10), la fonction de relaxation s'écrit donc

$$R(t, t_0) = E \cdot e^{-\int_{t_0}^t \alpha(\xi) d\xi} \quad \text{avec} \quad \alpha(\xi) = \frac{E(\xi)}{\eta(\xi)} \quad (2.21)$$

La résolution de l'équation différentielle (2.19), appliquée cette fois à chaque branche  $\mu$  du modèle de Maxwell généralisé en utilisant la partition de la contrainte pour l'ensemble des branches, donne une fonction de relaxation qui s'écrit sous la forme d'une série de Dirichlet [BAZ 73a]

$$R(t, t_0) = E_0 + \sum_{\mu=1}^r E_{\mu} e^{-\int_{t_0}^t \alpha_{\mu}(\xi) d\xi} \quad \text{avec} \quad \alpha_{\mu}(\xi) = \frac{E_{\mu}(\xi)}{\eta_{\mu}(\xi)} \quad (2.22)$$

Le premier terme représente la première branche (sans piston) et la somme représente les  $r$  autres branches (avec pistons) du modèle de Maxwell généralisé.

On utilise le même raisonnement pour l'approche en rigidité à l'aide du modèle de Kelvin. Après résolution de l'équation différentielle (2.18) et par analogie avec l'équation intégrale de Boltzmann en fluage (2.9), on déduit la forme de la fonction de fluage uniaxiale pour une simple cellule de Kelvin

$$J(t, t_0) = \frac{1}{E} \left( 1 - e^{-\int_{t_0}^t \alpha(\xi) d\xi} \right) \quad (2.23)$$

L'écriture pour un modèle de Kelvin-Voigt généralisé (Figure 2-5) conduit à la fonction de fluage suivante

$$J_{ijkl}(t, t_0) = \frac{1}{E_0} + \sum_{\mu=1}^r \frac{1}{E_{\mu}} \left( 1 - e^{-\int_{t_0}^t \alpha(\xi) d\xi} \right) \quad (2.24)$$



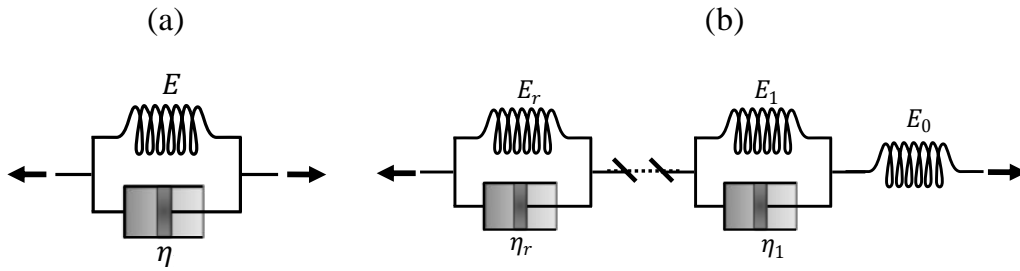


Figure 2-5 : Modèle de Kelvin (a) ; modèle de Kelvin généralisé (b).

La Figure 2-6 montre les graphes de la fonction de relaxation correspondant au modèle de Maxwell généralisé et de la fonction de fluage correspondant au modèle de Kelvin généralisé.

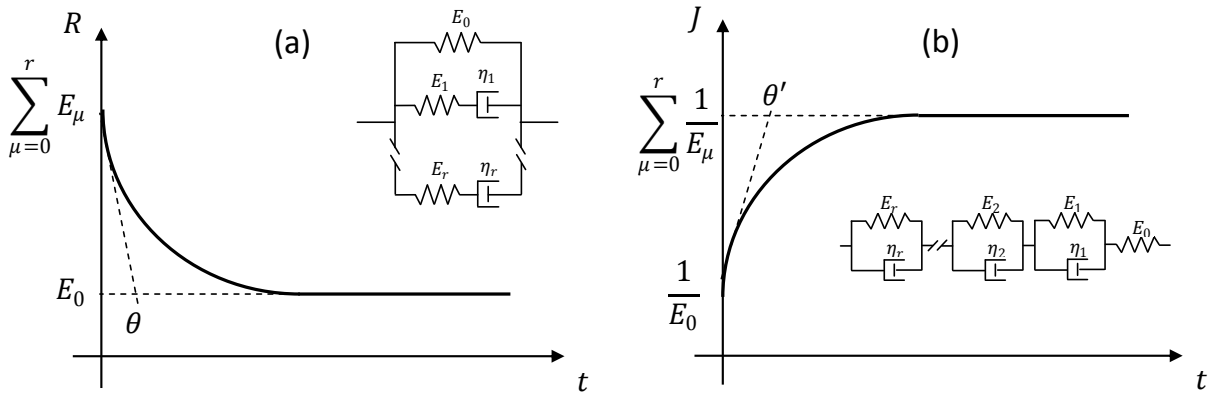


Figure 2-6 : Graphe de la fonction de relaxation (a) ; Graphe de la fonction de fluage (b).

avec  $\theta$  et  $\theta'$  les temps caractéristiques pour les modèles de Maxwell et de Kelvin respectivement.

La généralisation de l'écriture de l'équation de Boltzmann dans le cas tridimensionnel conduit au tenseur de relaxation dont les composantes s'écrivent en fonction des paramètres du modèle de Maxwell généralisé [JUR 96]

$$R_{ijkl}(t, t_0) = A_{ijkl_0} + \sum_{\mu=1}^r A_{ijkl_\mu} \left( e^{-\int_{t_0}^t \frac{A_{ijkl_\mu}(\xi)}{V_{ijkl_\mu}(\xi)} d\xi} \right) \quad (2.25)$$

$R_{ijkl}$  sont les composantes du tenseur de relaxation,  $A_{ijkl_\mu}$  et  $V_{ijkl_\mu}$  sont les composantes des tenseurs d'élasticité et d'amortissement pour la branche  $\mu$  et  $r$  est le nombre de branches du modèle.

De même, la généralisation dans le cas tridimensionnel de la fonction du fluage conduit au tenseur de fluage dont les composantes s'écrivent en fonction des paramètres du modèle de Kelvin-Voigt généralisé

$$J_{ijkl} = \frac{1}{A_{ijkl_0}} + \sum_{\mu=1}^r \frac{1}{A_{ijkl_\mu}} \left( 1 - e^{-\int_{t_0}^t \frac{A_{ijkl_\mu}(\xi)}{V_{ijkl_\mu}(\xi)} d\xi} \right) \quad (2.26)$$

### 2.1.4 Identification des paramètres des modèles rhéologiques

Avant la résolution d'un problème viscoélastique, on a besoin d'identifier les paramètres des modèles rhéologiques à partir de données expérimentales ou de fonctions analytiques connues. La méthode la plus utilisée est celle des moindres carrés [LEM 09]. Le principe de cette méthode est de réduire au maximum l'écart entre les valeurs de référence (expérimentales ou analytiques) et la courbe calculée sur la base du modèle rhéologique. Étant donné le nombre d'inconnues dans ce problème, Jurkiewicz a fixé le nombre de branches et il a proposé une progression géométrique des coefficients  $\alpha_\mu$  ( $\mu = 1..r$ ) selon la forme  $\alpha_\mu = 10^{\mu-1}$  unité-temps [JUR 96].

La démarche est la suivante : pour identifier les paramètres d'un modèle de Maxwell généralisé sur un intervalle de temps donné  $[t_k, t_0]$ , on minimise l'écart entre la fonction de relaxation donnée  $\bar{R}$  et la fonction de relaxation recherchée  $R$  exprimée sous la forme d'une série de Dirichlet en fonction des paramètres du modèle. La méthode d'identification se fait indépendamment de l'instant du début de chargement  $t_0$ . On pose  $R(t_j, t_0) = R_j$ , d'où la somme des écarts quadratiques

$$e_j = (\bar{R}_j - R_j) \rightarrow S = \sum_{j=0}^k e_j^2 \quad (2.27)$$

Après développement analytique consistant à minimiser la somme des écarts quadratiques, la méthode aboutit à l'écriture matricielle suivante

$$[A]\{E\} = \{B\} \quad (2.28)$$

où  $\{E\}$  est le vecteur des  $E_\mu$  ( $\mu = 1 \dots r$ ) à déterminer. Les composantes de la matrice  $[A]$  dépendent des paramètres  $\alpha_\mu$  du modèle de Maxwell généralisé et du temps écoulé depuis le début du chargement  $(t_j - t_0)$ ; les composantes du vecteur  $\{B\}$  dépendent de la fonction  $\bar{R}$  et de la durée de chargement  $(t_j - t_0)$ .

Le même raisonnement est utilisé pour l'identification des paramètres du modèle de Kelvin généralisé à partir d'une fonction de fluage. Les détails de la méthode appliquée aux modèles de Maxwell et Kelvin généralisés sont présentés dans l'annexe 1.

### 2.1.5 Relation entre fonctions de fluage et de relaxation

On ne dispose pas toujours de la fonction de fluage ou de relaxation. On peut donc être amené à déduire l'une à partir de l'autre. On obtient une relation entre la fonction de relaxation et la fonction de fluage, en remplaçant dans l'équation de Volterra (2.11) la déformation par une valeur unitaire imposée constante, ce qui donne [BAZ 74]

$$J(t, t) R(t, t_0) - \int_{t_0}^t \frac{\partial J(\tau, t)}{\partial \tau} R(\tau, t_0) d\tau = 1 \quad (2.29)$$

De même pour la fonction duale, en remplaçant la contrainte par une valeur unitaire imposée constante dans l'équation de Volterra (2.11), on obtient

$$R(t, t) J(t, t_0) - \int_{t_0}^t \frac{\partial R(\tau, t)}{\partial \tau} J(\tau, t_0) d\tau = 1 \quad (2.30)$$

Ces équations ont la forme d'une équation intégrale de Fredholm de seconde espèce. Pour la résolution de ce genre d'équation on peut utiliser une méthode de discrétisation numérique [BAZ 74].

On divise l'intervalle d'étude  $[t_0, t]$  de la partie intégrale en intervalles finis  $[t_j, t_{j+1}]$ , avec la notation suivante

$$J_{j,k} = J(t_j, t_k) \text{ et } R_{j,k} = R(t_j, t_k) \quad (2.31)$$

La discrétisation de l'intégrale (2.29) en pas de temps finis permet l'utilisation de l'une des solutions classiques pour la résolution numérique des intégrales. La méthode des trapèzes qui consiste à remplacer les fonctions de fluage et de relaxation par des relations linéaires, semble la plus simple en formulation, d'où

$$J_{k,k} R_{0,k} - \sum_{j=1}^k \left( \frac{R_{0,j} + R_{0,j-1}}{2} \right) (J_{j,k} + J_{j-1,k}) = 1 \quad (2.32)$$

avec

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^k \left( \frac{R_{0,j} + R_{0,j-1}}{2} \right) (J_{j,k} + J_{j-1,k}) &= \frac{R_{0,k}}{2} (J_{k,k} + J_{k-1,k}) + \sum_{j=1}^{k-1} \frac{R_{0,j}}{2} (J_{j,k} + J_{j-1,k}) \\ &+ \frac{R_{0,0}}{2} (J_{1,k} + J_{0,k}) + \sum_{j=1}^{k-1} \frac{R_{0,j}}{2} (J_{j+1,k} + J_{j,k}) \end{aligned} \quad (2.33)$$

Après réarrangement de la forme précédente on obtient

$$R_{0,k} = \frac{2 + R_{0,0}(J_{1,k} - J_{0,k}) + \sum_{j=1}^{k-1} R_{0,j}(J_{j+1,k} - J_{j-1,k})}{J_{k,k} + J_{k-1,k}} \quad \text{avec} \quad R_{0,0} = J_{k,k}^{-1} = E(t_0) \quad (2.34)$$

Avec le même raisonnement, la fonction de fluage peut être déduite de la fonction de relaxation par l'expression suivante

$$J_{0,k} = \frac{2 + J_{0,0}(R_{1,k} - R_{0,k}) + \sum_{j=1}^{k-1} J_{0,j}(R_{j+1,k} - R_{j-1,k})}{R_{k,k} + R_{k-1,k}} \quad \text{avec} \quad J_{0,0} = R_{k,k}^{-1} = \frac{1}{E(t_0)} \quad (2.35)$$

La précision de cette méthode est liée principalement à la taille du pas du temps choisi, autrement dit, au nombre d'incrémentes qui divisent l'intervalle  $[t_0, t]$ . La simplicité de la formulation mathématique et la puissance des moyens de calcul informatique permettent d'établir des milliers d'itérations et d'obtenir le résultat en quelques fractions de secondes.

## 2.2 Résolution d'un problème viscoélastique

La difficulté d'un problème viscoélastique réside dans la résolution des équations qui intègrent la loi de comportement (sous forme intégrale ou différentielle). Dans cette partie, une analyse bibliographique des méthodes de résolution d'un problème viscoélastique est menée.

### 2.2.1 Méthodes simplifiées

*Méthode du module effectif*: basée sur le principe de superposition de Boltzmann, elle a été développée et appliquée au béton [BAZ 75] ; elle consiste à remplacer le module d'élasticité du béton par un module variable en fonction du temps. La loi de comportement viscoélastique devient alors

$$\varepsilon(t) = \sigma(t) \frac{1 + \varphi_c(t_0, t)}{E_c(t_0)} = \frac{\sigma(t)}{E_{eff}(t_0, t)} \quad (2.36)$$

$E_{eff}$  est le module effectif et  $\varphi_c$  le coefficient de fluage.

Le problème se ramène donc à un problème purement élastique avec un module réduit  $E_{eff}$ . Cette méthode manque de précision lorsque le matériau est vieillissant. Cette méthode a été appliquée au bois en prenant un coefficient de fluage  $\varphi_w(t_0, t)$  [FRA 06].

*Méthode du module effectif ajusté (AEMM)* : elle présente une amélioration de la méthode du module effectif appliquée au béton [BAZ 73], [BAZ 75]. L'expression de la déformation s'écrit

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t_0)}{E_{eff}(t, t_0)} + \frac{\sigma(t) - \sigma(t_0)}{E_{aju}(t, t_0)} \quad (2.37)$$

avec  $E_{aju}$  le module effectif ajusté, fonction du coefficient de fluage  $\varphi$  et d'un coefficient de vieillissement  $\chi$  qui rend compte des redistributions des efforts internes dans les composants ou les structures multimatériaux

$$E_{aju}(t, t_0) = \frac{1}{\frac{1}{E(t_0)} + \chi(t_0, t) \frac{\varphi_c(t, t_0)}{E(28)}} \quad (2.38)$$

Cette méthode est notamment utilisée pour l'analyse des structures en béton armé ou précontraint [DES 86].

*Méthode de la contrainte moyenne* : dans cette approche la fonction de fluage est remplacée par sa valeur moyenne sur l'intervalle de temps considéré [JUR 96]

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t_0)}{E_{eff}(t, t_0)} + \frac{\sigma(t) - \sigma(t_0)}{E^m(t, t_0)} \quad (2.39)$$

avec

$$E^m(t_0, t) = \frac{2}{J(t_0, t) + J(t, t)} \quad (2.40)$$

## 2.2.2 Principe de correspondance

La solution analytique de l'équation de la viscoélasticité linéaire (équation de Volterra) peut être résolue par le principe de correspondance. Cette approche permet d'obtenir une équation élastique linéaire à partir d'une équation viscoélastique par le biais de la transformation de Laplace-Carson. Cette transformation permet de ramener le produit de convolution à un produit ordinaire dont les facteurs sont les transformées de la fonction de comportement d'une part et de l'histoire de sollicitation d'autre part. La loi de comportement de Boltzmann pour un matériau non vieillissant peut se mettre sous la forme d'un produit de convolution de Stieltjes noté  $\otimes$  [SAL 09]

$$\varepsilon(t) = (\mathbf{J} \otimes \dot{\sigma})(\tau) \quad (2.41)$$

L'intérêt est que si les fonctions  $\mathbf{J}$  et  $\dot{\sigma}$  admettent chacune une transformée de Laplace, alors  $\varepsilon(t)$  a pour transformée le produit simple des transformées de Laplace de  $\mathbf{J}$  et de  $\dot{\sigma}$

$$\mathcal{L}[\mathbf{J} \otimes \dot{\sigma}](p) = \mathcal{L}[\mathbf{J}](p) \times \mathcal{L}[\dot{\sigma}](p) \quad (2.42)$$

Ainsi, la transformée de Laplace permet de transformer le comportement viscoélastique linéaire non-vieillissant en un comportement pseudo-élastique [MAN 66]. Après avoir trouvé une solution pour le problème pseudo-élastique, on déduit ensuite la solution viscoélastique par transformée de Laplace inverse.

Néanmoins, si les coefficients dépendent du temps (matériau vieillissant), la transformation Laplace-Carson n'est pas applicable. Ainsi, cette méthode n'est facilement applicable qu'à certains problèmes pour lesquels on peut trouver une solution explicite de l'équation élastique associée.

### 2.2.3 Approximation numérique de l'équation différentielle

On rappelle que le comportement viscoélastique linéaire représenté par un modèle rhéologique quelconque, s'écrit sous la forme différentielle suivante [MAN 66], [RAB 69]

$$\sum_i a_i \frac{d^i \sigma}{dt^i} = \sum_j b_j \frac{d^j \varepsilon}{dt^j} \quad (2.43)$$

avec  $a_i$  et  $b_j$  constantes dépendant des paramètres du modèle. Il existe plusieurs méthodes pour la résolution du problème à partir de la solution de l'équation différentielle [REK 94]. On peut citer parmi les méthodes d'intégration directes celles d'Euler, de Taylor (Taylor's Expansion Method) et de Runge-Kutta (Runge-Kutta Method). On peut aussi évoquer les méthodes d'intégration numérique d'Adams-Bashforth, les méthodes d'Adams-Moulton, les méthodes de différentiation numérique, la méthode des différences finies, les méthodes d'extrapolation, etc. Des travaux récents ont fait l'objet d'une étude comparative de plusieurs méthodes d'approximations numériques de l'équation différentielle [SOV 10].

Certaines de ces méthodes sont exactes mais pour certains degrés de fonctions polynomiales. Cependant l'allure des fonctions de fluage ou de relaxation s'approche d'une fonction exponentielle. D'autres possèdent l'inconvénient de cumuler les erreurs, ce qui oblige à procéder par pas de temps très petits.

### 2.2.4 Méthode d'intégration numérique de l'équation intégrale

En première approche, la méthode la plus simple et la plus directe pour la résolution numérique de l'intégrale de l'équation de Volterra (2.10) ou (2.11) est celle des sommes finies suivantes [BAZ 67]

$$\varepsilon(t) = - \int_{t_0}^t \frac{\partial J(t, \tau)}{\partial \tau} \sigma(\tau) d\tau = \int_{t_0}^t L(t, \tau) \sigma(\tau) d\tau \approx \Delta t \sum_{k=1}^j \sigma_j L(t_i, t_k) \quad (2.44)$$

ou

$$\sigma(t) = - \int_{t_0}^t \frac{\partial R(t, \tau)}{\partial \tau} \varepsilon(\tau) d\tau = \int_{t_0}^t F(t, \tau) \varepsilon(\tau) d\tau \approx \Delta t \sum_{k=1}^j \sigma_j F(t_i, t_k) \quad (2.45)$$

$$\text{avec } \frac{\partial J(t, \tau)}{\partial \tau} = L(t_i, t_k) \text{ et } \frac{\partial R(t, \tau)}{\partial \tau} = F(t_i, t_k)$$

Une méthode basée sur l'équation de Boltzmann en fluage, développée par Bazant [BAZ 67] pour la résolution de l'équation intégrale, repose sur la méthode des trapèzes. Elle est développée et appliquée pour des pas de temps variables [BAZ 72]. Dans cette méthode l'auteur s'est basé sur la discrétisation du temps  $t$  à des sub-intervalles  $\Delta t_j = t_j - t_{j-1}$  considérés inégaux. La contrainte est supposée linéaire sur l'intervalle de temps  $[t, t + \Delta t]$ . La loi de comportement devient alors

$$\varepsilon_j = \sum_{k=1}^j \left( \frac{1}{2} \right) \Delta t (J_{j,k} + J_{j,k-1}) \frac{\Delta \sigma_k}{\Delta t} \quad (2.46)$$

avec :  $\Delta \sigma_k = \sigma_k - \sigma_{k-1}$  ;  $\varepsilon_r = \varepsilon(t_j)$  et  $J_{j,k} = J(t_j, t_k)$ .

Il faut noter que cette équation est toujours valable dans le cas d'un chargement instantané (ou changement soudain dans la fonction de chargement) à un instant donné  $t_m$ , en posant  $\Delta t_m = 0$  ou bien  $t_m = t_{m-1}$ . Réécrivons l'équation (I-12) pour  $t_j = t_{j-1}$

$$\varepsilon_{j-1} = \sum_{k=1}^{j-1} \frac{1}{2} (J_{j-1,k} + J_{j-1,k-1}) \Delta \sigma_k \quad (j > 1) \quad (2.47)$$

On obtient, par soustraction des équations (2.47) et (2.48), la loi de comportement viscoélastique linéaire

$$\Delta \sigma_j = E_j'' (\Delta \varepsilon_j - \Delta \varepsilon_j'') \quad (2.48)$$

avec

$$E_j'' = \frac{2}{(J_{j,j} + J_{j,j-1})} \quad (2.49)$$

$$\text{Pour } (j > 1) : \Delta \varepsilon_j'' = \sum_{k=1}^{j-1} \Delta \sigma_k \frac{1}{2} (J_{j,k} + J_{j,k-1} - J_{j-1,k} - J_{j-1,k-1}) \quad (2.50)$$

$$\text{Pour } (j = 1) : \Delta \varepsilon_r'' = 0$$

Ces équations permettent un calcul numérique itératif des valeurs de  $\Delta \sigma_j$  où les valeurs de  $\Delta \varepsilon_j$  sont connues. Pour un calcul pratique, il est mieux de choisir les temps  $t_j$  selon une progression géométrique, c'est-à-dire  $\frac{t_{j+1}}{t_j} = \frac{t_j}{t_{j-1}} = \text{cte}$  [BAZ 72]. Cette méthode a été généralisée dans le cas tridimensionnel [FAI 94]. L'écriture sous la forme matricielle appliquée dans le cas d'un matériau isotrope donne

$$\begin{aligned} \{\Delta \sigma_j\} &= E_j'' [v] (\{\Delta \varepsilon_j\} - \{\Delta \varepsilon_j''\}) \\ \{\Delta \varepsilon_j\} &= \{\varepsilon_j\} - \{\varepsilon_{j-1}\} \end{aligned} \quad (2.51)$$

avec

$$E_j'' = \frac{2}{(J_{j,j} + J_{j,j-1})} \quad (2.52)$$

$$\text{Pour } (j > 1) : \{\Delta \varepsilon_j''\} = \sum_{k=1}^{j-1} \{\Delta \sigma_k\} \frac{1}{2} [D^*]^{-1} (J_{j,k} + J_{j,k-1} - J_{j-1,k} - J_{j-1,k-1}) \quad (2.53)$$

$$\text{Pour } (j = 1) : \Delta \varepsilon_j'' = 0$$

où  $[v]$  est la matrice de rigidité modifiée dans laquelle le coefficient de Poisson est considéré indépendant du temps. Il existe d'autres méthodes d'intégration numérique pour la résolution des équations intégrales de Boltzmann telles que les méthodes de Riemann, la méthode du point milieu, la méthode de Simpson et les méthodes de quadratures gaussiennes, etc. [REK 94]. Une synthèse sur l'utilisation de ces méthodes d'intégration est présentée dans l'annexe 2.

Les méthodes de résolution numérique basées sur la formulation intégrale ne sont pas très intéressantes du point de vue de la programmation numérique, sachant que le calcul de  $\{\Delta \varepsilon_j''\}$ , donné par la formule (2.50) exige le stockage en mémoire de tous les instants de chargement  $t_j$  et de tous les vecteurs  $\{\Delta \sigma_k''\}$  pour tous les points d'intégration de tous les éléments. Elle exige aussi le calcul des fonctions  $J_{j,k}$ ,  $J_{j,k-1}$ ,  $J_{j-1,k}$  et  $J_{j-1,k-1}$  pour tous les temps  $t_k$ ,  $t'_{k-1}$   $k = 1 \dots, r$ .

### 2.2.5 Formulation incrémentale

Si les méthodes numériques classiques comme celle d'Euler, de Runge-Kutta et de Predictor-corrector sont appliquées à l'équation différentielle, l'incrément de temps ne peut pas dépasser le plus petit temps de relaxation au risque d'une instabilité numérique. Pour palier cette difficulté, une méthode incrémentale fondée sur les équations différentielles associées au modèle de Maxwell généralisé a été proposée initialement par Bazant [BAZ 74]. Elle a été reprise dans le cas d'un matériau vieillissant par Jurkiewicz [JUR 96]. Cette formulation est analogue à celles proposées par [ZIE 68], [BAZ 72] et [GHA 95], [CHA 11] formulées à partir d'une chaîne de Kelvin.

Le principe de cette formulation consiste à utiliser l'écriture de la fonction de fluage ou de relaxation sous forme d'une série de Dirichlet dans l'équation intégrale de Boltzmann. On rappelle que la loi de comportement sous la forme intégrale de Boltzmann s'écrit en relaxation

$$\sigma(t) = \int_0^t R(t, \tau) \cdot \dot{\varepsilon}(\tau) d\tau \quad (2.54)$$

avec  $R$  la fonction de relaxation qui s'exprime en fonction des paramètres du modèle de Maxwell sous la forme d'une série de Dirichlet, comme suit

$$R(t, \tau) = \sum_{\mu=0}^r E_{\mu} e^{-\alpha_{\mu}(t-\tau)} \quad \text{avec} \quad \alpha_0 = 0 \quad (2.55)$$

En reportant l'équation (2.55) dans l'équation (2.54), on obtient

$$\sigma(t) = \int_0^t \sum_{\mu=0}^r E_{\mu} e^{-\alpha_{\mu}(t-\tau)} \dot{\varepsilon}(\tau) d\tau \quad (2.56)$$

Dans un modèle de Maxwell généralisé, la contrainte totale est la somme des contraintes dans les branches  $\mu$

$$\sigma(t) = \sum_{\mu=0}^r \sigma_{\mu}(t) \quad (2.57)$$

On a à l'instant  $t + \Delta t$

$$\sigma_{\mu}(t + \Delta t) = \int_0^{t+\Delta t} E_{\mu} e^{-\alpha_{\mu}(t+\Delta t-\tau)} \dot{\varepsilon}(\tau) d\tau \quad (2.58)$$

On peut décomposer cette intégrale en une intégrale qui représente la mémoire de la sollicitation passée à l'instant  $t$  et une autre qui représente l'évolution de la réponse sur l'incrément  $\Delta t$

$$\sigma_{\mu}(t + \Delta t) = e^{-\alpha_{\mu}\Delta t} \int_0^t E_{\mu} e^{-\alpha_{\mu}(t-\tau)} \dot{\varepsilon}(\tau) d\tau + \int_t^{t+\Delta t} E_{\mu} e^{-\alpha_{\mu}(t+\Delta t-\tau)} \dot{\varepsilon}(\tau) d\tau \quad (2.59)$$

d'où

$$\Delta\sigma_{\mu} = \sigma_{\mu}(t)(e^{-\alpha_{\mu}\Delta t} - 1) + \int_t^{t+\Delta t} E_{\mu} e^{-\alpha_{\mu}(t+\Delta t-\tau)} \dot{\varepsilon}(\tau) d\tau \quad (2.60)$$

A ce stade, l'équation (2.60) est exacte. Cependant sa résolution nécessite l'introduction d'une approximation pour calculer l'intégrale. Ainsi, on admet d'approximer  $\varepsilon(\tau)$  par une variation linéaire sur l'intervalle  $[t, t + \Delta t]$

$$\varepsilon(\tau) = \varepsilon(t) + \frac{\Delta\varepsilon}{\Delta t}(\tau - t) \rightarrow \dot{\varepsilon}(\tau) = \frac{\Delta\varepsilon}{\Delta t} \quad \forall \tau \in [t, t + \Delta t] \quad (2.61)$$

En reportant l'expression de  $\dot{\varepsilon}(\tau)$  dans l'équation (2.60), la loi de comportement viscoélastique s'exprime sous la forme incrémentale suivante

$$\Delta\sigma = \tilde{E}\Delta\varepsilon - \sigma^{hist}(t) \quad (2.62)$$

avec

$$\begin{cases} \tilde{E} = E_0 + \sum_{\mu=1}^r E_{\mu} \left( \frac{1-e^{-\alpha_{\mu}\Delta t}}{\alpha_{\mu}\Delta t} \right) \\ \sigma^{hist}(t) = \sum_{\mu=1}^r (1 - e^{-\alpha_{\mu}\Delta t}) \sigma_{\mu}(t) \end{cases} \quad (2.63)$$

$\tilde{E}$  représente un module fictif et  $\sigma^{hist}$  est un terme qui résume l'histoire passée du chargement. Un développement plus détaillé de cette formulation fera l'objet du troisième chapitre.

L'avantage de cette formulation réside dans sa simplicité. Elle ressemble à la formulation du comportement thermoélastique linéaire. De plus, on n'est plus obligé de garder en mémoire toute l'histoire passée du chargement pour l'utiliser à chaque instant. Enfin la longueur du pas de temps utilisé  $\Delta t$  est fini mais pas forcément petit, ce qui permet de traiter les problèmes de solides viscoélastiques de manière itérative avec un nombre limité de pas de calcul [JUR 00] [COU 11].

Ces avantages rendent cette formulation très pratique pour la résolution de problèmes viscoélastiques complexes. À titre d'exemples, elle a été utilisée pour l'évaluation des effets mécaniques dus à la chaleur d'hydratation dans un projet de barrage en béton [FAI 94], ou dans le cas d'un matériau orthotrope soumis à un chargement thermique [ZOC 97]. Elle a aussi été généralisée en 2D pour le calcul de la part viscoélastique d'un modèle visco-élasto-plastique appliqué au béton [BER 03].

### 2.3 Modèles mécanosorptifs

Divers modèles analytiques ont été établis depuis le début des années 70 afin de modéliser ce comportement. Certains auteurs ont proposé des modèles basés sur des interprétations purement phénoménologiques à partir du comportement de la macrostructure. D'autres auteurs se sont basés sur des approches microscopiques de la structure du bois [BAZ 85], [GRI 88], [MUK 86], etc. Vu la complexité du comportement mécanosorptif, il était toujours nécessaire d'introduire des hypothèses pour séparer les effets dus aux paramètres mis en jeu (chargement mécanique et humidité relative). Dans la littérature on distingue deux familles de modèles en fonction de la partition de la réponse en déformation à savoir :

*modèles à activation indépendante* dans lesquels la déformation totale est la somme des déformations élastique instantanée  $\varepsilon_e$ , visqueuse  $\varepsilon_{ve}$ , hydrique (retrait/gonflement)  $\varepsilon_w$  et mécanosorptive  $\varepsilon_{ms}$  [RAN 03], [NAV 05] :

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_e(t) + \varepsilon_{ve}(t) + \varepsilon_{ms}(t) + \varepsilon_w(t) \quad (2.64)$$

Dans cette famille, le premier modèle est celui de Leicester [LEI 71] suivi des modèles de Rant-Maunus [RAN 75], de Hunt [HUN 89], de Torrats [TOR 92], de Martenson [MAR 94], etc.

*modèles à activation combinée*, dans lesquels on considère qu'il existe une interaction entre les phénomènes physiques. La déformation totale s'écrit donc

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_e(t) + \varepsilon_{ve+ms}(t) + \varepsilon_w(t) \quad (2.65)$$



Le couplage se traduit essentiellement entre la déformation viscoélastique et la déformation mécanosorptive, donnant une déformation viscoélastique mécanosorptive  $\varepsilon_{ve+ms}$ .

Plusieurs modèles basés sur cette approche existent [GRI 88], [HAN 95], [HUS 09], etc. La plupart des modèles reposent sur le modèle rhéologique de Kelvin généralisé. Cependant, d'autres auteurs [BOU 03], [CHA 06] ont utilisé un modèle de Maxwell généralisé.

Certains auteurs prennent en considération l'effet du couplage mécanique sur la déformation hydrique (retrait-gonflement) tel que

$$\varepsilon_w(t) = \varepsilon_{w0}(t) + \varepsilon_{w\sigma}(t) \quad (2.66)$$

avec  $\varepsilon_{w\sigma}(t)$  la déformation due à l'influence mécanique sur le retrait-gonflement et  $\varepsilon_{w0}$  la déformation libre.

Ainsi, Dubois a proposé un modèle basé sur la partition de la déformation, dans lequel la contrainte influence la déformation hydrique au travers de la déformation viscoélastique  $\varepsilon_{ve}(\tau)$  [DUB 05]

$$\varepsilon_w(t) = \int_0^t (\alpha_l(t - \tau) + m \varepsilon_{ve}(\tau)) \dot{w}(\tau) d\tau \quad (2.67)$$

où  $\alpha_l(t) = \alpha_{l,0} + \sum_{\mu=1}^r \alpha_{l,\mu} (1 - e^{-\theta_\mu t})$ ,  $\theta_\mu$  et  $\alpha_{l,\mu}$  étant les paramètres d'un modèle de Kelvin à identifier ;  $m$  est un paramètre qui prend en considération le mode de variation hydrique.

Un état de l'art plus détaillé des modèles a été fait successivement par [GRI88], [PIT 96], [RAN 03], [CHA 06], etc.

Parmi les modèles les plus pertinents, qui prennent en considération le fluage limite, on peut citer celui de Hunt [HUN 89] qui propose une forme mathématique (fonctions exponentielles) équivalente à celle de deux éléments mécanosorptifs de type Kelvin. L'écriture mathématique est capable de reproduire les trajectoires mécanosorptives (Figure 2-7)

$$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_{ve} + \sigma_0 \left( J_1 \left( 1 - e^{-\frac{n}{N_1}} \right) + J_2 \left( 1 - e^{-\frac{n}{N_2}} \right) \right) \quad (2.68)$$

où  $n$  est le nombre de cycles,  $J_1$  et  $J_2$  sont les complaisances caractéristiques, et  $N_1$  et  $N_2$  sont les nombres des cycles caractéristiques. Cette formulation n'est valable que pour des cycles d'humidité identiques.

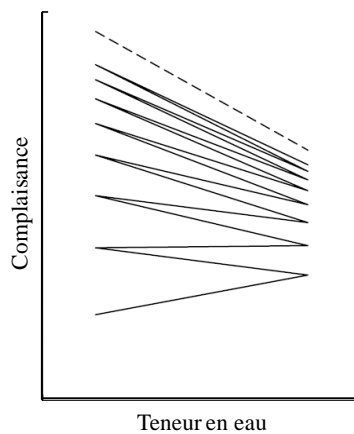


Figure 2-7 : Illustration du fluage limite [HUN 89].

L'interprétation du seuil mécanosorptif a été proposée par Gril [GRI 88]. Ce modèle repose sur des interprétations de la microstructure du bois. Il permet un blocage partiel de la déformation, si un seuil d'humidité n'est pas dépassé. Il est constitué d'un ressort qui représente la contribution élastique du réseau de microfibrilles et d'un dispositif « hygroverrou » en parallèle dans lequel la matrice amorphe est modélisée par des ressorts et des amortisseurs. Cette interprétation du blocage de la déformation a été déjà proposée par Bazant [BAZ 79] dans le cas du béton. Le modèle est basé sur la théorie d'assouplissement et de rigidification du matériau lors des variations de la teneur en eau. Le couplage de ces deux aspects avec la viscoélasticité a été détaillé par Dubois [DUB 04]. Cette théorie a été appliquée sur le matériau bois par Randriambololona [RAN 03] puis par Husson [HUS 09].

L'une des difficultés à surmonter lors de la modélisation est la succession des phases de rigidification et d'assouplissement. Dans ce cas, la principale difficulté est de jouer sur les deux comportements donnés par la loi de Hooke lors d'un assouplissement et par la loi de Bazant lors d'une rigidification [BAZ 79], [RAN 03].

$$\sigma = E(w) \cdot \varepsilon \text{ (assouplissement) et } \dot{\sigma} = E(w) \dot{\varepsilon} \text{ (rigidification)} \quad (2.69)$$

où  $E(w)$  est le module d'élasticité qui dépend de l'état hydrique du bois.

L'hypothèse de blocage de la déformation lors du séchage en dessous d'une teneur en eau seuil va à l'encontre des constatations expérimentales. En effet il est dit que lorsqu'on sèche la déformation augmente ; ceci se justifie dans ce modèle par l'hypothèse d'activation combinée des déformations qui stipule l'existence d'un couplage entre le chargement mécanique et la déformation hydrique.

En 2010, Husson a proposé un modèle élastique mécanosorptif [HUS 10] qui aboutit à une loi de comportement généralisé pour tous chargements et toutes variations de teneur en eau sous la forme intégrale suivante

$$\varepsilon(t) = \int_{0-}^t \frac{1}{\bar{E}(t, \tau)} \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial \tau} d\tau \quad (2.70)$$

avec  $\bar{E}(t, \tau)$  la rigidité minimale correspondant à la teneur en eau maximale (seuil) propre à chaque palier de chargement, Figure 2-8.

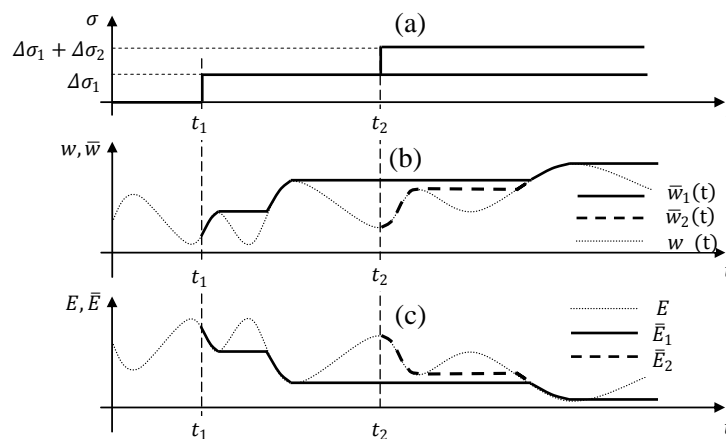


Figure 2-8 : Illustration des rigidités minimales pour deux incréments de chargement [HUS 10].

Cette approche a été justifiée dans le cadre thermodynamique par l'introduction d'une variable interne ou contrainte mécanosorptive associée à la déformation mécanosorptive.

Un ressort dit « hygroverrou » a été proposé afin de modéliser cette loi de comportement (Figure 2-9)

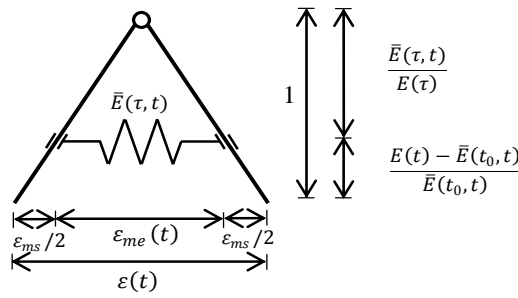


Figure 2-9 : Ressort hygroverrou [HUS 10].

Enfin, ce modèle a été couplé à la viscoélasticité via un modèle de Kelvin généralisé [HUS 09]. La loi de comportement viscoélastique hygroverrou basée sur un modèle de Kelvin à élasticité instantanée (Figure 2-10) s'exprime par :

$$\varepsilon(t) = \int_0^t J(t, \tau) \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial \tau} d\tau \quad \text{avec} \quad J(t, \tau) = \frac{1}{\bar{E}_0(t, \tau)} + \int_{\tau}^t \frac{1}{\eta_1(\xi)} e^{-\int_{\tau}^{\xi} \frac{\bar{E}_1(t, \alpha)}{\eta_1(\alpha)} d\alpha} d\xi \quad (2.71)$$

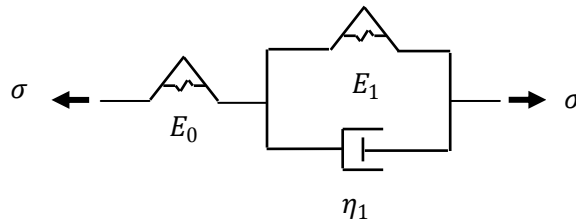


Figure 2-10 : Modèle de Kelvin à élasticité instantanée avec ressort hygroverrou [HUS 09].

L'utilisation de l'hypothèse d'activation combinée a permis la prise en compte de l'effet du fluage mécanosorptif et du fluage limite lorsque la courbe de fluage atteint sa limite viscoélastique. Ce modèle a été validé par comparaison aux résultats des essais mécanosorptifs établis par Randriambololona [RAN 03].

## 2.4 Conclusion

La modélisation du comportement viscoélastique du bois sous condition climatique stable est bien maîtrisée dans la littérature. À travers cette bibliographie, il apparaît que la formulation adéquate basée sur le modèle de Maxwell généralisé est la plus simple à utiliser pour la simulation numérique compte tenu de ses avantages pour le calcul numérique.

La modélisation du bois sous teneur en eau variable montre l'existence d'une très grande variété de modèles qui se distinguent dans leurs principes et dans leur fonctionnement comme l'indiquent les résultats expérimentaux. Un des modèles les plus pertinent est celui de Husson [HUS 09], car il est applicable quelque soit la variation de chargement ou de teneur en eau. Ce modèle est basé sur l'hypothèse de partition de la déformation à activation combinée.

## **PARTIE II : ÉTUDE EXPERIMENTALE**

**Chapitre 3. Protocole expérimental**

**Chapitre 4. Essais préliminaires**

**Chapitre 5. Essais mécanosorptifs**



## Chapitre 3. PROTOCOLE EXPERIMENTAL

Dans la littérature, la majorité des essais mécanosorptifs ont été réalisés avec des échantillons de taille relativement grande et des épaisseurs de l'ordre du centimètre [ARM 61], [HUN89]. En réalité, des échantillons de grandes dimensions nécessitent plusieurs jours d'attente pour atteindre l'équilibre hydrique à chaque variation de l'humidité relative. Ainsi, lors d'un essai mécanosorptif, il faudrait prendre en considération l'effet du gradient hydrique sans connaître l'existence ou non d'une interaction avec les effets mécanosorptifs, ce qui complique l'interprétation des résultats. Certains auteurs ont effectué des essais avec des échantillons de dimensions relativement petites [PIT 96, RAN 03], etc., conduisant à des résultats plus satisfaisants pour ce qui concerne la durée d'équilibre hydrique.

Cette observation nous a conduit à opter pour des éprouvettes de petites dimensions, tout en restant dans le cadre des hypothèses de la mécanique des milieux continus ; c'est-à-dire que l'échantillon doit être de volume suffisamment grand pour palier l'hétérogénéité de sa microstructure. Cette précaution est nécessaire pour pouvoir considérer une déformation ou une contrainte moyenne sur le volume élémentaire représentatif (VER) [BIG 11] [SIM 10]. Du fait de l'orthotropie du bois, les dimensions du VER sont différentes selon la direction. En effet, une dizaine de fibres sont suffisantes dans la direction tangentielle, ce qui n'est pas le cas dans la direction radiale. En effet, quelques fibres ne représentent pas forcément un VER de sa macrostructure car elles peuvent concerner un seul cerne. Une meilleure représentation est de prendre un volume intégrant plusieurs cernes annuels de croissance.

### 3.1 Description du dispositif

Les essais ont été réalisés à l'Institut des matériaux et de la technologie du bois de la Haute école spécialisée Bernoise (Bern University of Applied Sciences) à Bienne (Suisse) dans le cadre d'une STSM (Short Term Scientific Mission) de l'action COST FP0904.

Pour la réalisation des essais de sorption-désorption, des solutions chimiques ont été utilisées pour réguler l'humidité relative dans le dessiccateur qui contient les échantillons (Figure 3-1). Les essais se sont déroulés dans une pièce climatisée d'ambiance stable avec une température de 25°C et une humidité relative de 50%.

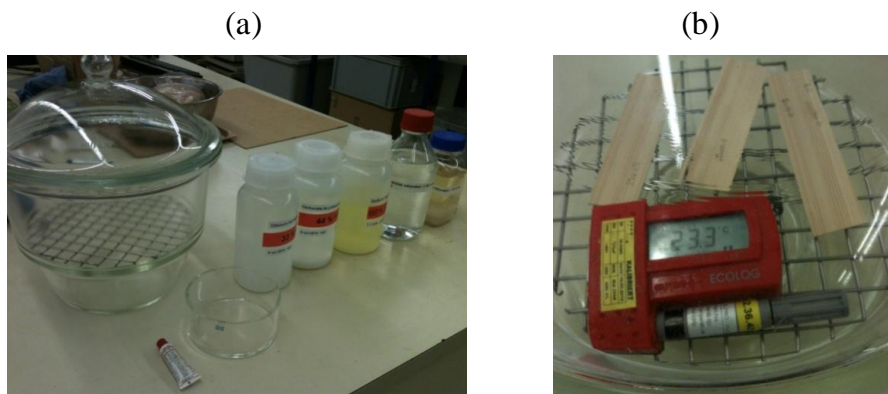


Figure 3-1 : Dispositif pour la détermination de l'isotherme de sorption-désorption.

Les sels chimiques utilisés pour obtenir les humidités relatives recherchées pour une température de 25°C, sont listés dans le Tableau 3-1.

Sel utilisé	Humidité relative attendue %
Hydroxyde de potassium (KOH)	9
Acétate de potassium (CH <sub>3</sub> CO <sub>2</sub> K)	22
Chlorure de magnésium (MgCl <sub>2</sub> )	33
Carbonate de potassium (K <sub>2</sub> CO <sub>3</sub> )	43
Nitride de sodium (NaNO <sub>2</sub> )	65
Chlorure de sodium (NaCl)	75
Chlorure de potassium (KCl)	85
Hydrogénophosphate de sodium (Na <sub>2</sub> HPO <sub>4</sub> )	97

Tableau 3-1 : Humidités relatives pour les solutions salines utilisées.

Pour la réalisation des essais mécaniques, l'appareil utilisé est une machine de traction-compression de capacité maximale 500 N équipée d'une cellule hygrothermique. La cellule est de forme cylindrique dotée d'une double paroi. De l'eau à température contrôlée circule dans cette double paroi afin de fixer la température à l'intérieur de la cellule. L'humidité relative est contrôlée par un mélange d'air sec et d'air humide envoyé dans la cellule (Figure 3-2).

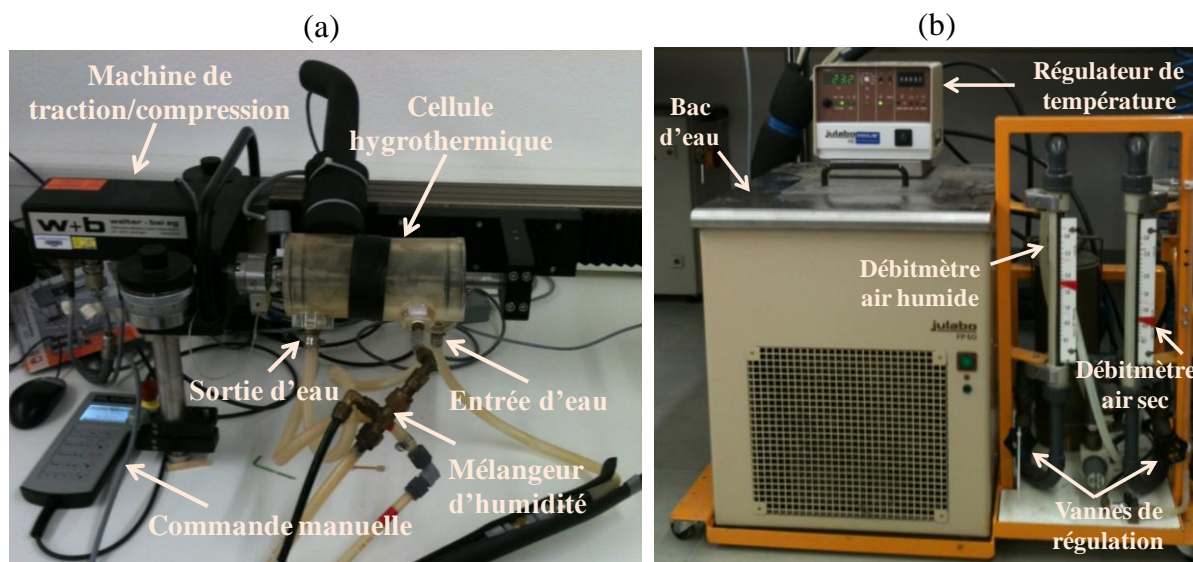


Figure 3-2 : Dispositif expérimental : vues d'ensemble.

La Figure 3-3 montre le schéma de la cellule ouverte munie de l'échantillon. Ce dispositif permet de faire varier l'humidité relative à l'intérieur de la cellule tout en contrôlant la température avec une précision satisfaisante (erreur de l'ordre de  $\pm 0,3^\circ\text{C}$ ).

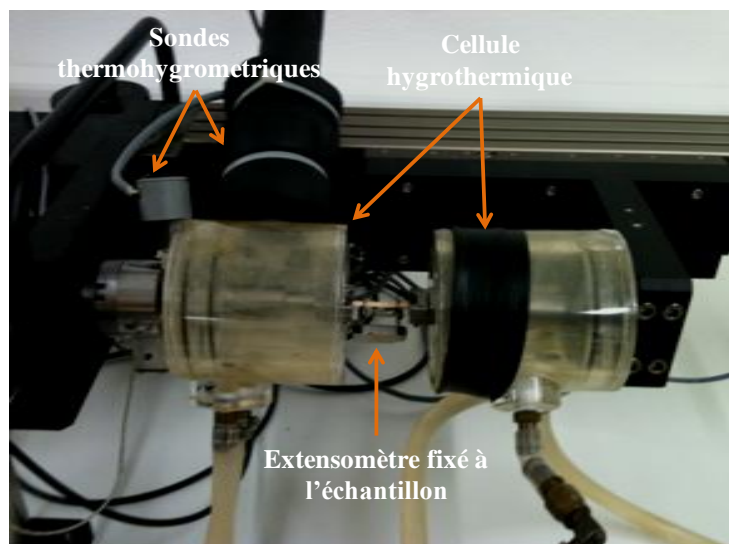


Figure 3-3 : Machine de traction-compression hydro-thermique.

Ce dispositif, rénové et calibré avant nos essais, avait déjà été utilisé par plusieurs auteurs [PIT 96], [RAN 03], [NAV 02], [FRO 12], etc.

## 3.2 Préparation des échantillons

Deux grandes familles d'échantillons sont préparées lors de l'usinage : 1) pour les essais de sorption, 2) pour les essais hydromécaniques.

### 3.2.1 Échantillons pour les essais de sorption

Des échantillons de faible épaisseur de l'ordre de 1 mm, permettant l'accélération du processus de sorption, ont été usinés. Ces échantillons ont été prélevés dans la même lamelle de bois d'aubier (annexe 3). Leur masse moyenne à l'état sec est de l'ordre de 1 g ; cette masse est suffisante pour pouvoir mesurer une variation de 1% de teneur en eau sur une balance de  $10^{-4}$ g de précision, Figure 3-1(b).

### 3.2.2 Échantillons pour les essais à l'aide de la machine de traction hydrothermique

Compte tenu des arguments développés en introduction de ce chapitre, tous les échantillons utilisés pour les essais hygrothermiques présentent des dimensions relativement petites de l'ordre de  $50 \times 3 \times 1$  mm<sup>3</sup> (L x R x T), prélevés dans la direction des fibres.

Les échantillons sont débités parallèlement à la direction des fibres. On distingue 3 zones de découpe dans la lamelle de bois (Figure 3-4) en fonction du nombre de cernes : zone P22, zone P21/P24 et zone P23 (Tableau 3-2). La différence entre les épaisseurs des cernes résulte des conditions annuelles de croissance. En effet, de larges cernes de croissance indiquent de bonnes conditions de croissance, tandis que des cernes étroits révèlent des conditions de croissance moins favorables. Un récapitulatif des caractéristiques des échantillons est présenté dans le Tableau 3-2.



Zone	P21	P22	P23	P24
Nombre de cernes	4 à 5	Plus de 6	2 à 3	4 à 5
Nombre d'échantillons	6	10	3	6
Largeur (sens radial) (mm)	2,75 : 3,05	2,76 : 3,03	2,78 : 2,93	2,4 : 3,05
Epaisseur (sens transversal) (mm)	1,10 : 1,15	1,05 : 1,17	1,13 : 1,16	0,75 : 0,89

Tableau 3-2 : Identification des échantillons utilisés.

On notera que les échantillons de la zone P24 sont débités dans la même zone que les échantillons P21 mais avec une épaisseur différente. Les caractéristiques de chaque échantillon sont détaillées dans l'annexe 3.

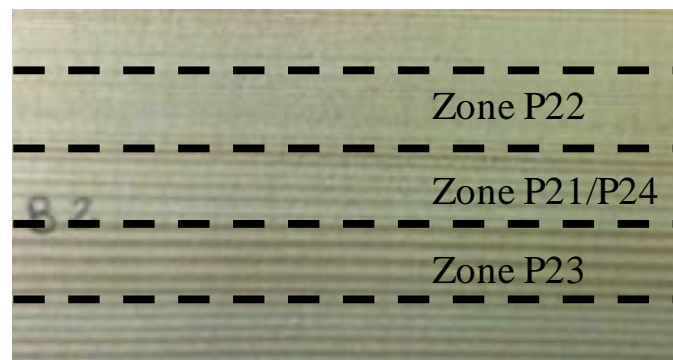


Figure 3-4 : Zones de prélèvement des échantillons.

La préparation des échantillons de cette dimension nécessite un protocole particulier. Les deux extrémités des échantillons sont prises dans un bloc de résine sur une longueur de 10 mm. Ceci permet de limiter le phénomène de concentration de contrainte et de faciliter la mise en place et le serrage dans les mors de la machine. La Figure 3-5 (a) montre les étapes successives de préparation des échantillons : moule en silicone, coulage et démoulage de la résine. Après durcissement de la résine, on surface les blocs de résine de façon plane et parallèle afin d'éviter tout moment parasite lors du serrage dans les mors.

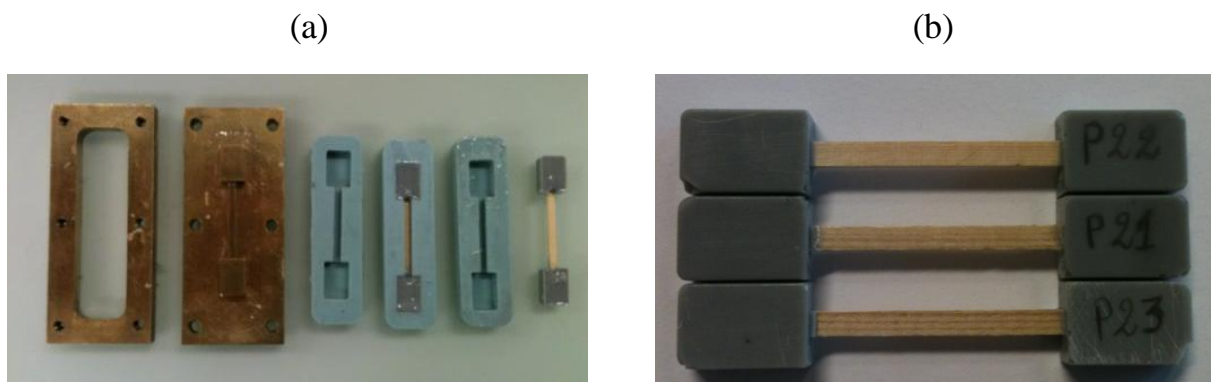


Figure 3-5 : Préparation des échantillons (a) ; Echantillons préparés (b).

### 3.3 Programme expérimental

Une campagne d'essais préliminaires de caractérisation a précédé les essais mécanosorptifs qui seront présentés dans le chapitre 5. Dans cette perspective des essais de caractérisation hydriques et des essais mécaniques instantanés et différés ont été effectués. Le schéma suivant décrit le programme des essais [SAI 13a].

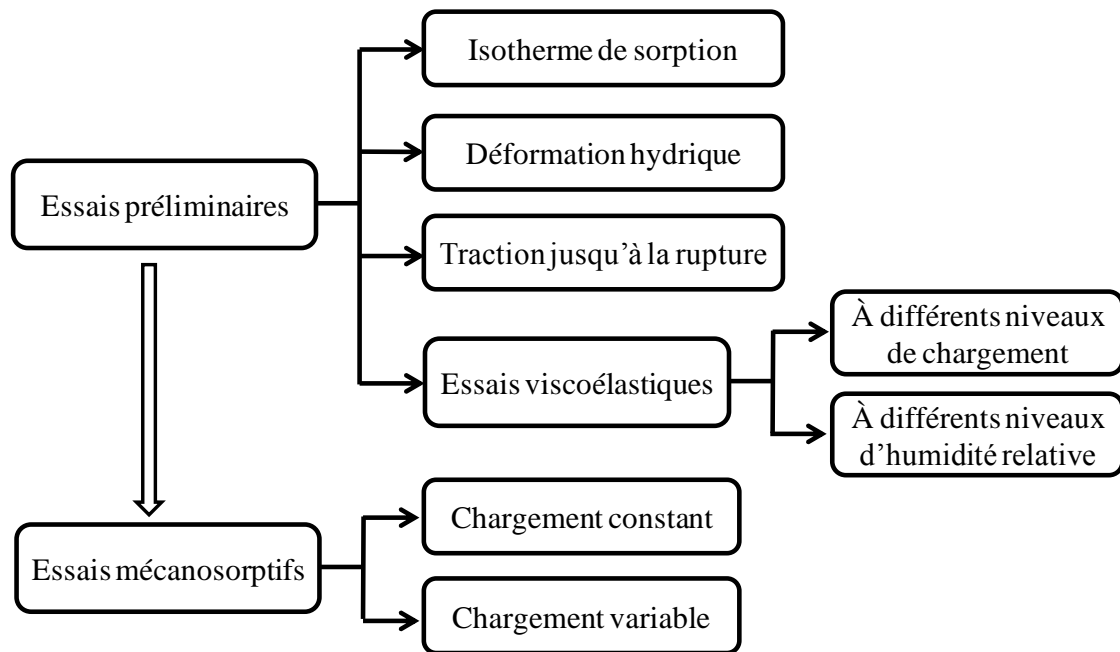


Figure 3-6 : Planning des essais.

Le choix des échantillons pour chaque essai est soigneusement effectué afin de minimiser les erreurs. Les échantillons de chaque zone sont utilisés dans les essais préliminaires.

Essais	Zones	Échantillons
Traction rupture	P21	P21-1 à 6
	P22	P22-1 à 6
	P23	P23-1 à 3
	P24	P24-1 et 2
Relaxation	P22	P22-7 à 10
	P24	P24-3 à 5
Fluage	P24	P24-6
Mécanosorption	P24	P24-2 et 5

Tableau 3-3 : Répartition des échantillons utilisés en fonction des essais.

Le Tableau 3-3 présente les zones et les échantillons par zone en fonction des essais réalisés. L'annexe 3 détaille l'ensemble des essais effectués pour tous les échantillons.



## Chapitre 4. ESSAIS PRELIMINAIRES

### 4.1 Essais de caractérisation hydrique

Dans ce paragraphe, on s'intéresse au comportement hygroscopique du Sapin Blanc. L'essai de sorption, qui traduit la relation entre la teneur en eau et l'humidité relative, est tout d'abord effectué. Ensuite les résultats de l'essai de déformation hydrique permettant d'obtenir le coefficient de retrait/gonflement hydrique sont présentés.

#### 4.1.1 Isotherme de sorption

##### 4.1.1.1 Hystérésis de sorption

Le cycle de sorption-désorption qui résulte d'une augmentation suivie d'une diminution progressive de l'humidité relative est effectué sur sept échantillons à l'aide du dispositif décrit au §3.2.13.1. L'humidité relative est contrôlée à l'intérieur du dessiccateur par un hygromètre. Pour mesurer le poids des échantillons à sec, ceux-ci ont été laissés dans l'étuve à 103°C pendant 24h. Ensuite, ils sont laissés dans le dessiccateur au moins 8h afin d'atteindre l'humidité relative souhaitée et l'équilibre hydrique de l'échantillon. L'équilibre hydrique est atteint lorsque la masse de l'échantillon se stabilise.

La Figure 4-1 présente l'hystérésis de sorption représenté par la courbe des valeurs moyennes de la teneur en eau en fonction de l'humidité relative. La phase de sorption est la courbe en trait bleu et celle de désorption en trait rouge.

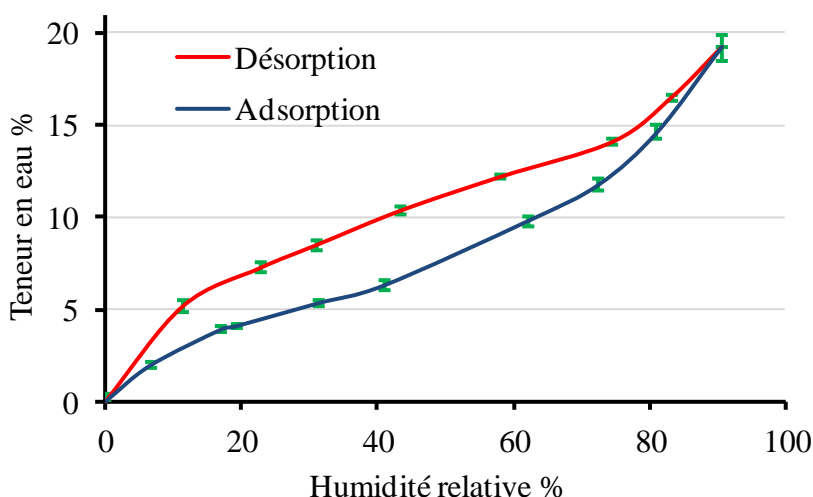


Figure 4-1 : Isotherme de sorption-désorption.

Le maximum d'humidité relative atteint avec des solutions saturées des sels chimiques est de l'ordre de 91 %, ce taux d'humidité relative correspond à une teneur en eau du bois d'environ 19,5%. L'écart type des résultats est représenté sur chaque point de mesure par une barre d'erreur verticale. Dans l'ensemble, l'erreur sur les sept échantillons est très faible, l'écart type relatif maximal est de 3,7% et correspond à une humidité relative d'environ 91%.

#### 4.1.1.2 Relation entre $w$ et $HR$

Dans l'intervalle d'humidité relative de 20% à 75% on observe une relation quasi-linéaire entre la teneur en eau et l'humidité relative. On déduit deux droites parallèles qui correspondent aux phases d'adsorption et de désorption (Figure 4-2).

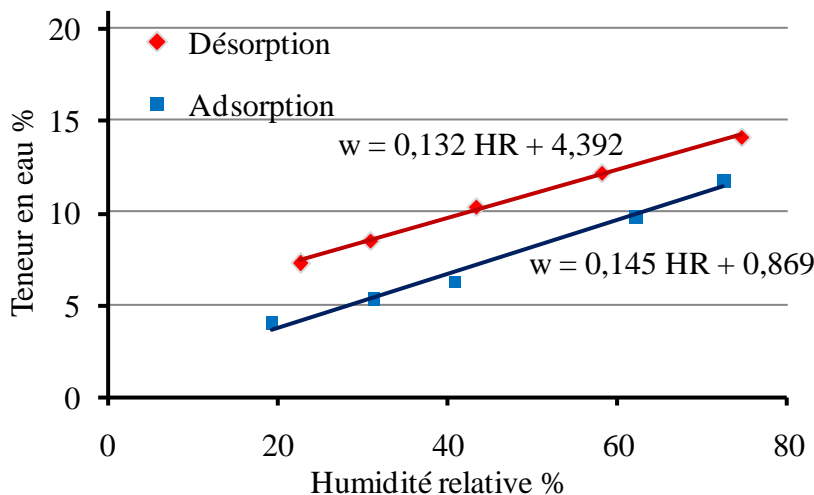


Figure 4-2 : Teneur en eau en fonction de l'humidité relative.

Deux équations linéaires traduisant la relation entre la teneur en eau et l'humidité relative peuvent être adoptées :

- Phase d'adsorption :

$$w(\%) = 0,145 \, HR(\%) + 0,869 \quad (3-1)$$

- Phase de désorption :

$$w(\%) = 0,132 \, HR(\%) + 4,39 \quad (3-2)$$

On remarque que les pentes des deux équations sont très proches, ce qui signifie que la teneur en eau du bois se stabilise avec des vitesses moyennes d'équilibre très proches en séchage et humidification sur cet intervalle.

#### 4.1.2 Déformation hydrique

L'essai consiste à faire varier l'humidité relative de la cellule tout en maintenant la force nulle et à mesurer la déformation résultante par l'extensomètre. La Figure 4-3 (b) montre l'évolution de la déformation libre de gonflement de l'échantillon P24-2 pour une humidité relative variant de 30% à 70% par paliers de 10% (Figure 4-3 (a)).

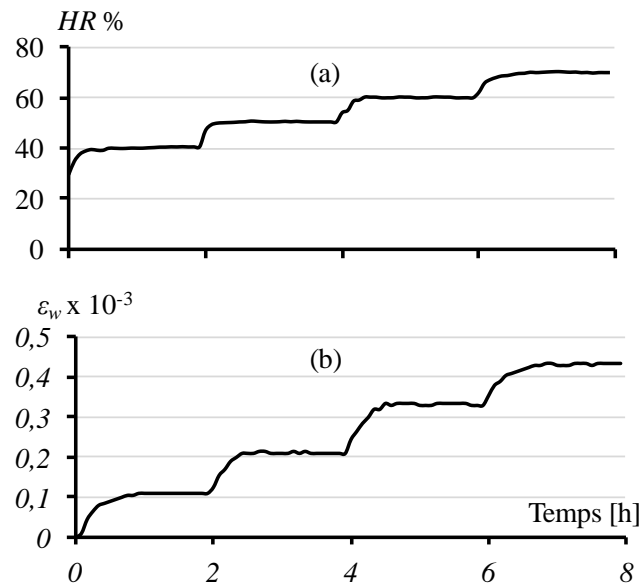


Figure 4-3 : Variation au cours du temps : (a) humidité relative, (b) déformation hydrique.

Cette expérience donne également une information sur le temps nécessaire pour atteindre l'équilibre hydrique lors d'une variation de 10% d'humidité relative pour un échantillon de 1 mm d'épaisseur dans la direction tangentielle. Pour cette variation d'humidité relative, on estime un temps d'environ 45 min pour que l'échantillon atteigne l'équilibre hydrique. De fait, cette durée inclut aussi le temps d'équilibre hydrique dans la cellule hygrothermique.

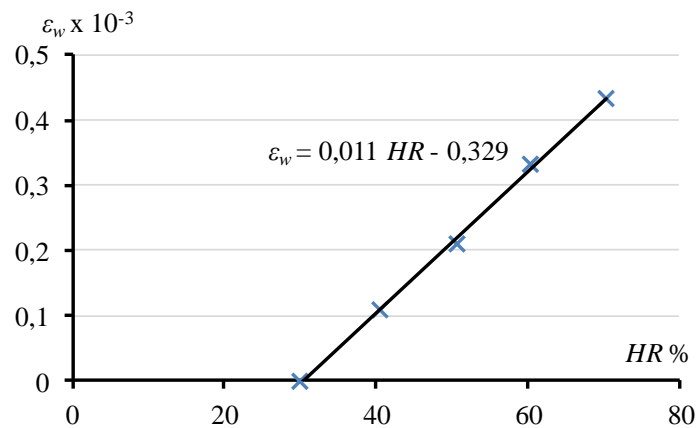


Figure 4-4 : Évolution de la déformation hydrique en fonction de l'humidité relative.

La Figure 4-4 représente la déformation hydrique mesurée pour l'échantillon en équilibre, en fonction de la variation de l'humidité relative. Une relation linéaire traduisant la relation entre la déformation hydrique et l'humidité relative est déduite :

$$\varepsilon_w = 0,011 \text{ HR} - 0,329 \quad (\varepsilon_w \times 10^{-3}; \text{HR en } \%) \quad (3-3)$$

On obtient donc le coefficient de dilatation hydrique longitudinal exprimé en fonction de la variation de l'humidité relative :  $\alpha_l = 0,011$ . On note bien que l'équation (3-3) ainsi que le coefficient de dilatation correspondent à un cycle d'adsorption de 30% à 70% d'humidité relative.

## 4.2 Essais de caractérisation mécanique instantanée

Les essais mécaniques instantanés en traction permettent de déterminer les contraintes de traction à la rupture ainsi que les modules longitudinaux d'élasticité des échantillons à différents taux d'humidité relative.

### 4.2.1 Essais de traction jusqu'à la rupture

Les essais de traction ont été effectués dans des conditions climatiques stables, en vitesse de déplacement imposé égale à 0,3mm/min identique pour tous les échantillons testés. Pour tous les essais de traction, la température est égale à  $20,8^{\circ}\text{C} \pm 0,3^{\circ}\text{C}$ . Les échantillons sont maintenus à humidité relative constante jusqu'à l'équilibre hydrique.

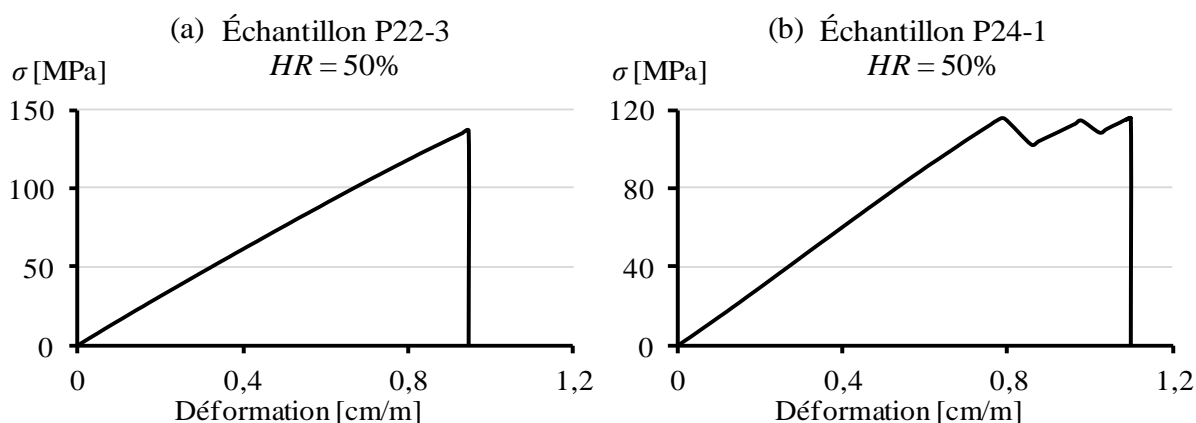


Figure 4-5 : Exemples de diagrammes de traction jusqu'à la rupture pour  $HR=50\%$ .

La Figure 4-5 présente les courbes contrainte-déformation de deux échantillons stabilisés sous humidité relative de 50%. On remarque que les deux courbes sont linéaires jusqu'à la rupture. En outre, on observe deux modes de rupture: le premier est une rupture fragile de la totalité des fibres. Le deuxième représente une succession de rupture partielle des fibres suivie de la rupture totale de l'échantillon.

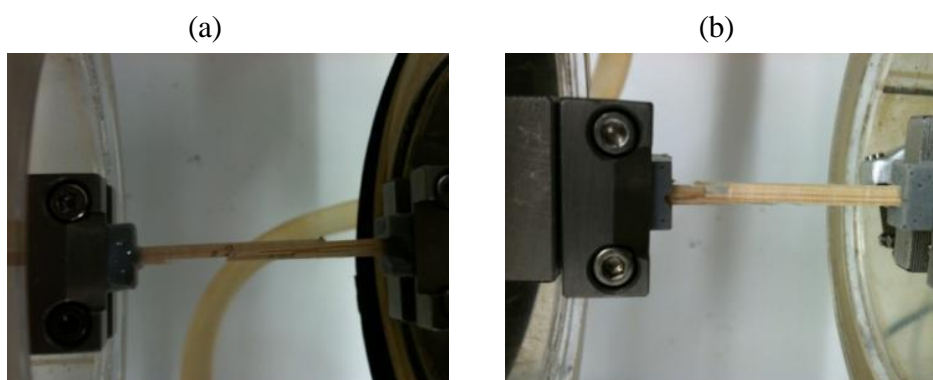


Figure 4-6 : Modes de rupture des échantillons en traction.

L'observation visuelle des échantillons rompus montre deux mécanismes de rupture : le premier présente la rupture des fibres sur plusieurs plans le long de l'échantillon (Figure 4-6 (a)); le deuxième présente la rupture des fibres dans un même plan transversal due sans doute à l'effet du maillon faible (Figure 4-6 (b)). L'ensemble des contraintes de rupture obtenues pour ces essais est présenté à la Figure 4-7.

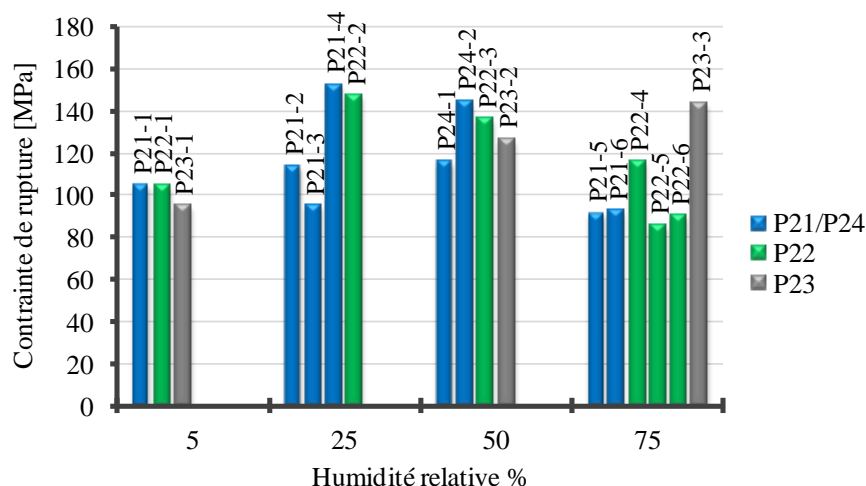


Figure 4-7 : Diagramme des contraintes de rupture en traction pour différentes humidités relatives.

Malgré le choix précautionneux des échantillons, une grande dispersion des contraintes de rupture est constatée. Ceci s'explique d'une part par le mode de rupture, qui diffère d'un échantillon à l'autre et d'autre part, par la faible épaisseur des échantillons qui peuvent avoir des défauts cachés. De façon générale, la résistance moyenne à la rupture est de l'ordre de 115 MPa. Cette valeur est supérieure à celle rapportée dans la bibliographie qui est de l'ordre de 90 à 100 MPa [DUL 98]. Ceci peut se justifier par les conditions climatiques combinées à l'altitude dans lesquelles l'arbre a poussé. Les résultats de tous les essais sont détaillés dans l'annexe 3.

#### 4.2.2 Évolution du module d'élasticité en fonction de $HR$ et de $w$

Sur la totalité des échantillons sollicités en traction, 12 ont été prélevés dans les zones P21 et P24, 9 ont été prélevés dans la zone P22 et enfin 3 ont été prélevés dans la zone P23. Ces échantillons ont été stabilisés entre 5% et 75% d'humidité relative et on a mesuré pour chaque essai le module d'élasticité initial à 10% de la charge de rupture. Les résultats sont présentés sur la Figure 4-8.

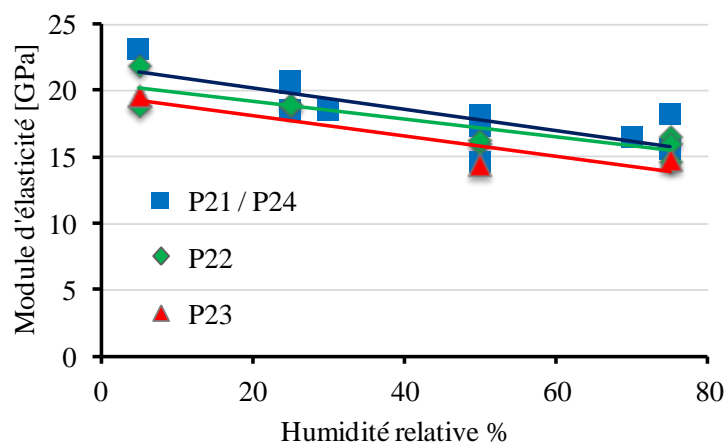


Figure 4-8 : Variation du module d'élasticité en fonction de  $HR(\%)$ .

On constate une dispersion importante des résultats. Dans l'ensemble, on remarque que les échantillons de la zone P23 (moins dense) sont moins rigides que ceux des zones P21/P24 et P22 (plus dense). Malgré cette dispersion, on admet l'existence d'une relation linéaire entre le module d'élasticité et l'humidité relative pour l'ensemble des échantillons P21/P24 et P22 :



$$E(\text{GPa}) = -0,078 \text{ HR}(\%) + 21,74 \quad (3-4)$$

Dans les essais à venir, seuls les échantillons des zones P21/P24 et P22 sont utilisés.

Afin de valider les résultats obtenus, on fait une comparaison entre les droites expérimentales déduites de la Figure 4-8 et celles calculées analytiquement via la formule empirique de Guitard [GUI 87]. Ainsi, on constate sur les Figure 4-9 (a) et (b), que les droites expérimentale et analytique sont assez proches sur l'intervalle hydrique d'étude.

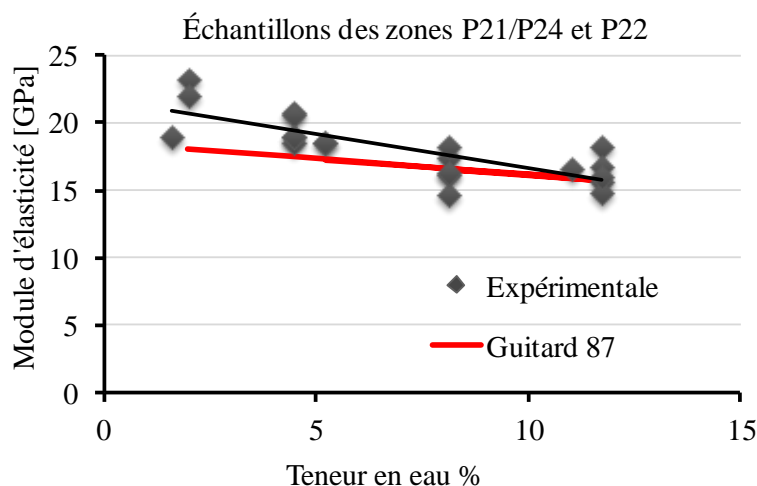


Figure 4-9 : Comparaison du module d'élasticité expérimental avec celui proposée par Guitard [GUI 87].

Pour étudier la dispersion des résultats entre plusieurs essais réalisés sur le même échantillon et sous les mêmes conditions climatiques, on mesure le module d'élasticité pour sept essais de traction sur l'échantillon P22-7 sous une humidité relative de 5% et pour 4 essais de traction sur l'échantillon P24-4 sous une humidité relative de 70%. Les écarts types relatifs sont de 1,6% et 2,1% respectivement. Ces résultats confirment la répétabilité des essais et la précision de la machine de traction utilisée.

### 4.3 Essais viscoélastiques à humidité constante

Comme indiqué précédemment, l'état hydrique du bois influence son comportement instantané et différé. Dans ce qui suit, des essais viscoélastiques pour différents paliers d'humidité relative sur des échantillons des zones P21 et P22 sont effectués. Durant tous les essais, la température est maintenue constante à  $20,8^{\circ}\text{C} \pm 0,3^{\circ}\text{C}$ . Afin de s'assurer de l'équilibre hydrique, l'échantillon est laissé dans l'ambiance souhaitée sous force nulle jusqu'à la stabilisation de la déformation contrôlée par l'extensomètre avant chaque essai.

#### 4.3.1 Essais de relaxation et de fluage à 30% d'humidité relative

Dans cet essai, deux échantillons P24 (P24-5 et P24-6) sont testés sous la même humidité relative de 30%. Le premier a subi un allongement maintenu constant pendant 17h puis annulé par un allongement égal de signe opposé. Cet allongement correspond à une contrainte égale à 12% de la contrainte de rupture. La Figure 4-10 (a) donne la courbe de relaxation-effacement de la contrainte. On laisse d'abord la contrainte se relaxer durant 17h. Puis, à l'effacement, la contrainte change de signe et se relaxe de nouveau en convergeant vers une valeur nulle avec une vitesse plus faible qu'en relaxation. On remarque qu'après 19h d'effacement, la contrainte dans l'échantillon n'est pas

complètement effacée. La différence entre la courbe en relaxation et en effacement peut trouver une explication dans la différence du comportement du bois en traction et en compression.

Le deuxième échantillon a subi une force maintenue constante pendant 10h avant d'être relâché. La Figure 4-10 (b) présente la courbe de fluage-recouvrance de la déformation. On remarque que 2h après le début de l'essai, plus de 80% du fluage a eu lieu. À l'instant du déchargement, le matériau se relâche avec la même déformation élastique initiale.

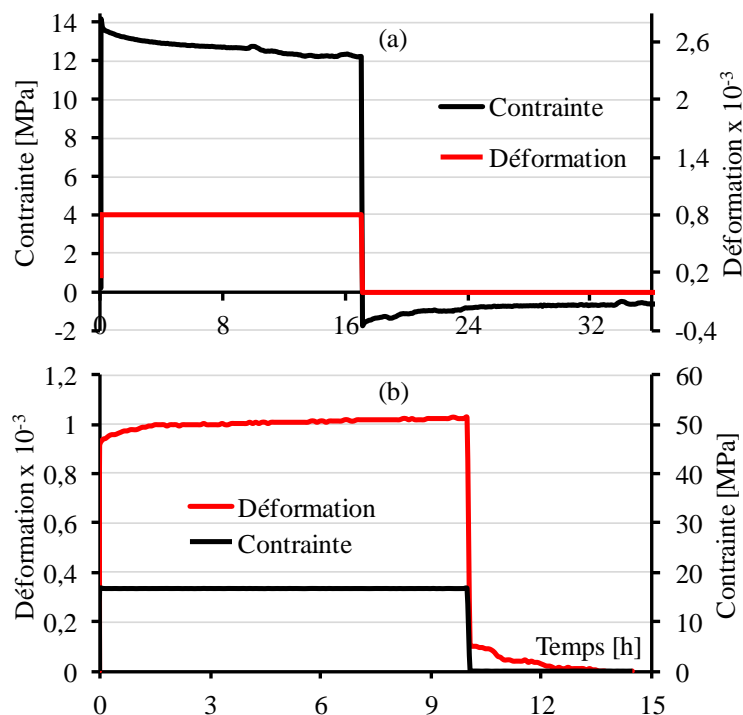


Figure 4-10 : Essais à  $HR=30\%$  : relaxation-effacement (a) ; fluage-recouvrance (b).

#### 4.3.1.1 Comparaison des courbes de relaxation et de fluage

Dans ce paragraphe, on se propose de vérifier la cohérence entre le comportement en fluage et le comportement en relaxation. Pour cela, on norme les deux courbes en les divisant, la première par la déformation élastique initiale, la seconde par la contrainte élastique initiale. On utilise ensuite la méthode d'inversion numérique présentée dans le paragraphe 2.1.5 afin de déduire les courbes inverses de relaxation et de fluage. La Figure 4-11 montre les courbes expérimentales de relaxation et de fluage relatives ainsi que leurs courbes duales associées, déduites des courbes relatives de fluage et de relaxation expérimentales pour une durée de 10h.

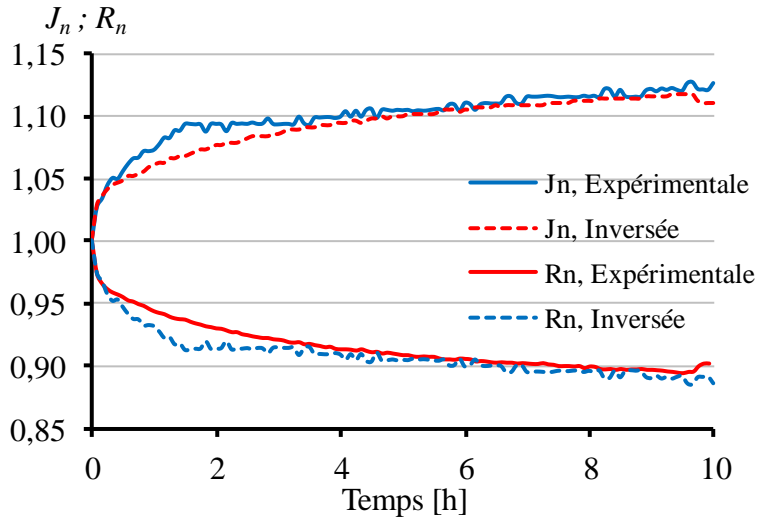


Figure 4-11 : Courbes expérimentales de fluage et de relaxation relatives et leurs courbes inversées, pour  $HR=30\%$ .

La très bonne correspondance observée sur la figure entre ces deux essais duals, effectués sur les échantillons de même zone (P24) avec la même humidité relative de 30%, confirme la cohérence du comportement en relaxation et en fluage dans le cadre de la viscoélasticité linéaire.

#### 4.3.1.2 Identification des paramètres

Conformément au paragraphe 2.1.4, la méthode des moindres carrés peut être appliquée aux courbes expérimentales de relaxation ou de fluage pour l'identification des paramètres des modèles rhéologiques de Maxwell ou de Kelvin généralisés respectivement. Cette méthode permet de déterminer les paramètres des modèles dont les courbes calculées par séries de Dirichlet se rapprochent le plus possible des courbes expérimentales. Afin de donner plus de précision à la courbe identifiée par cette méthode, on introduit le module d'élasticité ou de souplesse instantané dans la démarche d'identification.

Pour identifier un modèle de Maxwell généralisé à partir d'une courbe de relaxation, le système d'équations s'écrit dans ce cas :

$$[A]\{\rho\} = \frac{1}{E_{inst}} \{B\} \quad \text{avec} \quad \{\rho\} = \frac{1}{E_{inst}} \{E\} \quad (4.1)$$

la matrice  $[A]$  et le vecteur  $\{B\}$  ayant pour composantes :

$$\begin{cases} A_{q,p} = \sum_{j=0}^k \left( e^{-\alpha_p(t_j-t_0)} - 1 \right) e^{-\alpha_q(t_j-t_0)} & \forall q, p = 1 \dots r \\ B_q = \sum_{j=0}^k (\bar{r}_j - 1) e^{-\alpha_q(t_j-t_0)} & \forall q = 1 \dots r \end{cases} \quad (4.2)$$

De même, pour l'identification d'un modèle de Kelvin généralisé, en prenant en compte la souplesse instantanée, on utilise l'expression suivante :

$$[A]\{\gamma\} = E_{inst} \{B\} \quad (4.3)$$

la matrice  $[A]$  et le vecteur  $\{B\}$  ayant pour composantes :

$$\begin{cases} A_{p,q} = \sum_{j=0}^k (1 - e^{-\alpha_p(t_j-t_0)}) (1 - e^{-\alpha_q(t_j-t_0)}) & \forall p, q = 1 \dots r \\ B_p = \sum_{j=0}^k (\bar{J}_j - \gamma_0) (1 - e^{-\alpha_p(t_j-t_0)}) & \forall p = 1 \dots r \end{cases} \quad (4.4)$$

On rappelle que  $r + 1$  est le nombre total de branches pour un modèle de Maxwell généralisé. Il représente aussi le nombre total de cellules s'il s'agit d'un modèle de Kelvin généralisé avec élasticité instantanée. Les détails du développement analytique de cette méthode d'identification sont présentés dans l'annexe 4.

Dans le Tableau 4-1, on donne les coefficients de rigidité adimensionnels, identifiés à l'aide de cette méthode pour des modèles de Maxwell de 2 à 5 branches, à partir de la courbe expérimentale de relaxation pour une humidité relative de 30% (Figure 4-10-(a)). Pour le choix des paramètres  $\alpha_\mu$ , on adopte la fonction puissance suivante :

$$\alpha_\mu = 10^{(\mu-2)} \quad (\mu = 1..r) \quad (4.5)$$

Modèles de Maxwell		Branche $\mu$						$\sum \left( \frac{(R_n - \bar{R}_n)^2}{\bar{R}_{n,moy}^2} \right)$
		0	1	2	3	4	5	
1	$\rho_\mu$	0,8774	0,0478	0,0748				$3,87 \cdot 10^{-03}$
	$\alpha_\mu$	-	0,1	1				
2	$\rho_\mu$	0,8658	0,0708	0,0322	0,0311			$5,41 \cdot 10^{-04}$
	$\alpha_\mu$	-	0,1	1	10			
3	$\rho_\mu$	0,8667	0,0691	0,0359	0,0071	0,0212		$4,25 \cdot 10^{-04}$
	$\alpha_\mu$	-	0,1	1	10	100		
4	$\rho_\mu$	0,867	0,0685	0,0373	-0,0125	36,862	-36,822	$4,05 \cdot 10^{-04}$
	$\alpha_\mu$	-	0,1	1	10	100	1000	

Tableau 4-1 : Paramètres des modèles de Maxwell identifiés à partir de l'essai de relaxation.

De même, à partir de la courbe expérimentale de fluage à 30% d'humidité relative, on identifie des modèles de Kelvin généralisés de 2 à 5 cellules, Tableau 4-2. La même fonction puissance que celle de Maxwell est adoptée pour les valeurs de paramètres  $\alpha'_\mu$ :

$$\alpha'_\mu = 10^{(\mu-2)} \quad (\mu = 1..r) \quad (4.6)$$

Modèles de Kelvin		Cellule $\mu$						$\sum \left( \frac{(J_n - \bar{J}_n)^2}{\bar{J}_{n,moy}^2} \right)$
		0	1	2	3	4	5	
1	$\gamma_\mu$	1	32,767	10,173				$5,37 \cdot 10^{-03}$
	$\alpha'_\mu$	-	0,1	1				
2	$\gamma_\mu$	1	17,095	22,629	25,0196			$1,30 \cdot 10^{-04}$
	$\alpha'_\mu$	-	0,1	1	10			
3	$\gamma_\mu$	1	16,887	23,486	19,721	-105,342		$1,29 \cdot 10^{-04}$
	$\alpha'_\mu$	-	0,1	1	10	100		
4	$\gamma_\mu$	1	16,4386	25,8178	9,5495	-0,0098	0,0098	$1,21 \cdot 10^{-04}$
	$\alpha'_\mu$	-	0,1	1	10	100	1000	

Tableau 4-2 : Paramètres des modèles de Kelvin identifiés à partir de l'essai de fluage.

Le calcul de l'écart-type relatif dans les deux tableaux précédents nous permet de faire une comparaison entre les modèles en fonction du nombre de branches pour le modèle de Maxwell ou en fonction du nombre de cellules pour le modèle de Kelvin. On observe que la précision augmente jusqu'à  $r = 2$ , elle n'est pas améliorée pour des valeurs de  $r$  supérieures.

La Figure 4-12 (a) montre la comparaison entre la courbe de relaxation expérimentale et les fonctions analytiques calculées à partir des paramètres du modèle de Maxwell identifiés dans le Tableau 4-1. De même, la Figure 4-12 (b) montre la comparaison entre la courbe de fluage expérimentale et celles calculées analytiquement à partir des paramètres des modèles de Kelvin identifiés dans le Tableau 4-2.

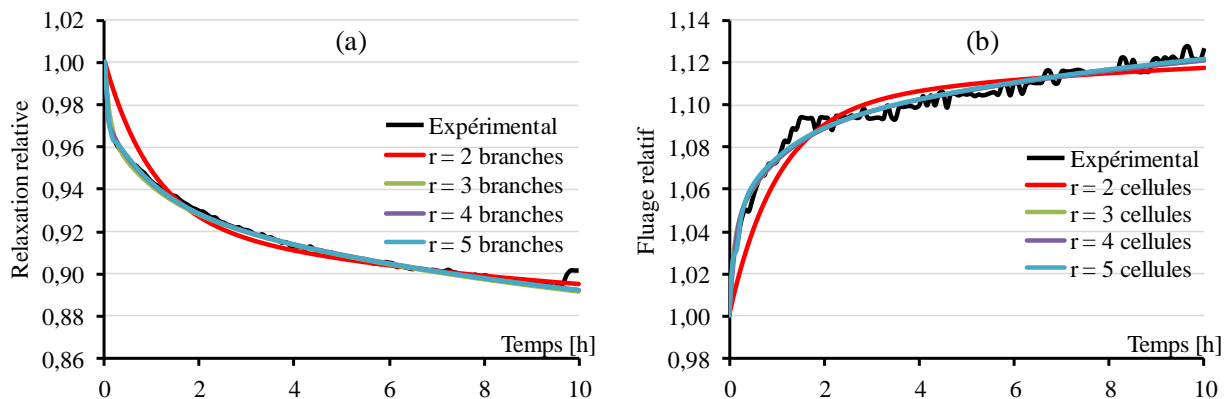


Figure 4-12 : Comparaison de la courbe expérimentale (trait noir) avec les modèles analytiques identifiés à partir des données expérimentale en relaxation (a) et en fluage (b).

On constate que les courbes des modèles de Maxwell ou Kelvin à 3, 4 et 5 branches ou cellules se superposent à la courbe expérimentale contrairement aux modèles à 2 branches. Ce résultat confirme la conclusion tirée du calcul des écarts-types relatifs dans les tableaux précédents (Tableau 4-1 et Tableau 4-2).

#### 4.3.2 Essai de relaxation-effacement à 25% d'humidité relative

Un autre essai de relaxation-effacement pour l'échantillon P22-8 à une humidité relative de 25% a été effectué. L'objectif de cet essai est d'estimer le temps nécessaire pour l'effacement total de la

contrainte. On applique un allongement correspondant à un chargement de 10% de la charge de rupture, ce taux de chargement étant suffisamment faible pour rester dans le domaine linéaire. Cette charge est maintenue constante pendant 12h. L'effacement a été réalisé en appliquant un allongement de même amplitude mais de signe inverse sur une durée d'environ 22h.

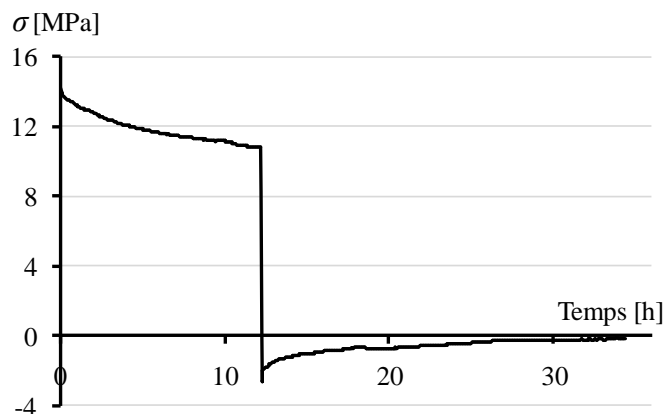


Figure 4-13 : Essai de relaxation-effacement à 25% d'humidité relative.

On constate un effacement quasi-total après une durée d'environ deux fois le temps de relaxation. Il faut noter que cette caractéristique peut différer d'une espèce de bois à l'autre. Cette conclusion nous permettra par la suite d'estimer la durée minimale de repos nécessaire pour qu'un échantillon revienne à son état initial (effacement total des contraintes internes).

#### 4.3.3 Relaxation sous différents niveaux de sollicitation et taux humidité relative

Pour s'assurer du maintien dans le domaine viscoélastique linéaire, on effectue des essais à plusieurs paliers de sollicitation. Cette série d'essais est réalisée sur deux échantillons P22-7 et P24-4. L'utilisation du même échantillon pour chaque série d'essais permet de limiter la dispersion entre les résultats.

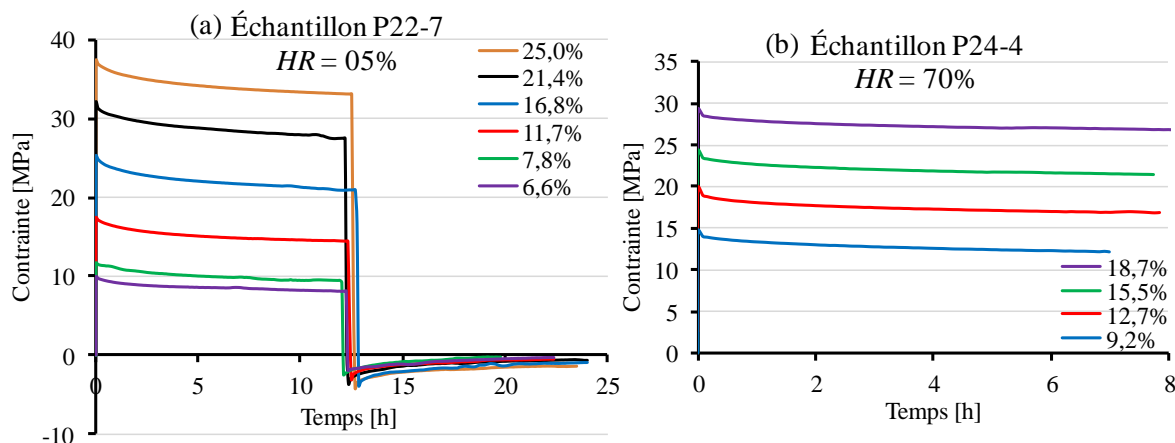


Figure 4-14 : (a) Essais de relaxation-effacement à 5% d'humidité relative ; (b) Essais de relaxation à 70% d'humidité relative.

L'échantillon P22-7 est sollicité sous 5% d'humidité relative par un allongement imposé correspondant à une contrainte de 6,6% ; 7,8% ; 11,7% ; 16,8% ; 21,4% et 25,0% de la contrainte de rupture successivement, Figure 4-14 (a). De même, l'échantillon P24-4 est sollicité sous 70%

d'humidité relative par un allongement imposé correspondant à une contrainte de 9,2% ; 12,7% ; 15,5% et 18,7% de la contrainte de rupture successivement.

Pour se mettre sur la même échelle à fin de comparaison, les courbes de la Figure 4-14 sont normalisées. Ainsi, les Figure 4-15 (a) et (b) montrent les courbes de relaxation-effacement et de relaxation déduites respectivement des courbes de la Figure 4-14 (a) et (b).

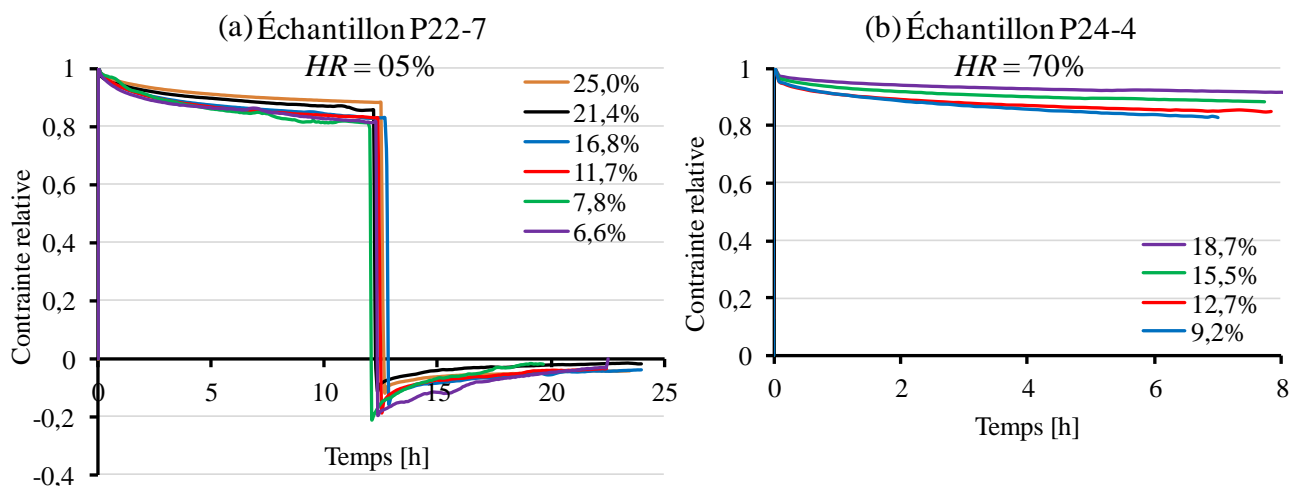


Figure 4-15 : Courbes des contraintes relatives pour la détermination du domaine de linéarité à une humidité relative de (a) 5% (échantillon P22-7) ; (b) 70% (échantillon P24-4).

Sur la Figure 4-15 (a), on constate que les courbes de relaxation se superposent dans les quatre premiers cas, ce qui veut dire que la linéarité est assurée tant que la contrainte initiale ne dépasse pas 16,8% de la contrainte de rupture. Ce comportement n'apparaît pas clairement en phase d'effacement. Cette limite de linéarité baisse à moins de 15,5% pour un taux d'humidité relative à 70% (Figure 4-15 (b)). Ces résultats donnent les limites du niveau de chargement qui délimitent le cadre dans lequel la théorie de la viscoélasticité linéaire peut être appliquée.

En complément des résultats précédents, deux essais de relaxation à 50% d'humidité relative sur les échantillons P22-9 et P24-3 et un essai à 75% d'humidité relative sur l'échantillon P22-10 sont effectués, voir Figure 4-16 (a) et (b) respectivement.

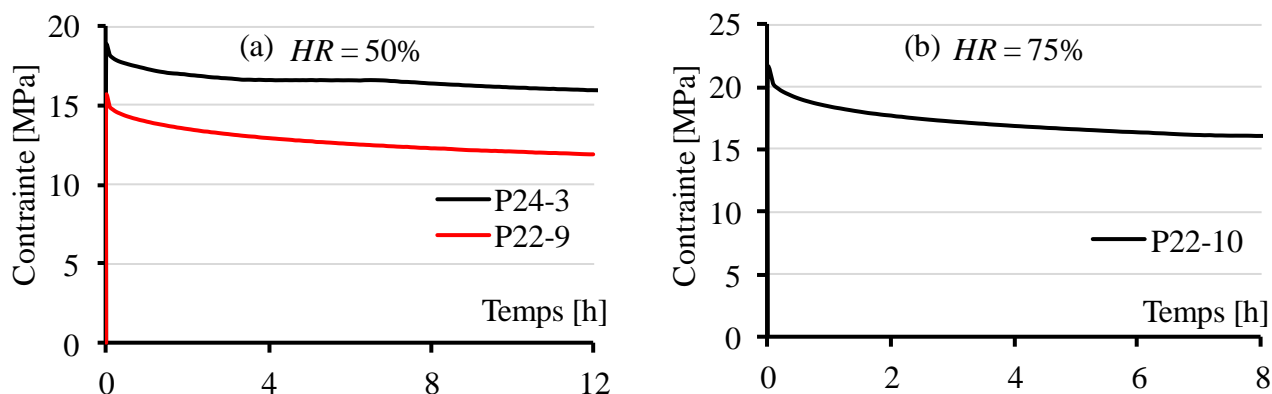


Figure 4-16 : Essais de relaxation : (a) échantillons P22-9 et P24-3 (HR = 50%) ; (b) échantillon P22-10, (HR = 75%).

Ces trois essais complémentaires permettent d'étudier la relation entre la fonction de relaxation et la variation de l'humidité relative sur les échantillons des zones P22 et P24. On constate que la contrainte se relaxe davantage lorsque le bois est humide que lorsqu'il est sec ; ce résultat est confirmé par les courbes de relaxation relative à différents taux d'humidité relative (voir courbes en traits continus, Figure 4-18). Dans ce qui suit, on adopte une relation exponentielle pour exprimer l'écart entre les courbes de relaxation relatives à différents taux d'humidité relative.

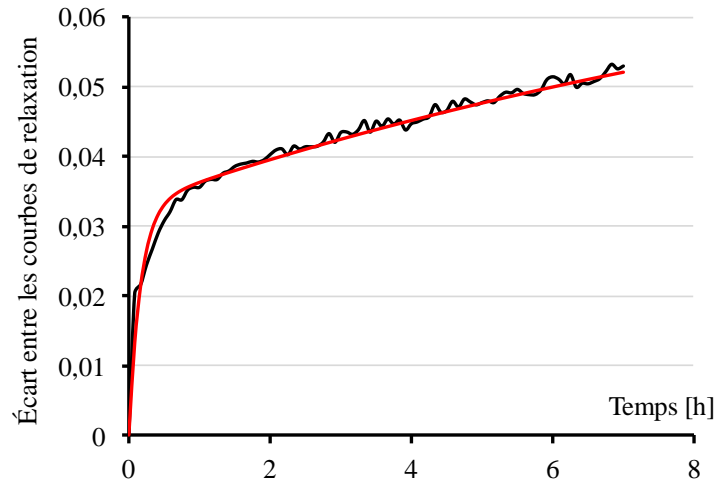


Figure 4-17 : Evolution de l'écart entre les courbes de relaxation relative réalisées à 30% et 70% d'humidité relative en fonction du temps.

Sur la Figure 4-17, la courbe en trait noir représente la différence entre les fonctions de relaxation relative des échantillons P24-5 et P24-4 (voir Figure 4-10 (a) et Figure 4-15 (b)). On remarque que la différence entre les courbes de relaxation au cours du temps peut s'écrire sous la forme non linéaire suivante :

$$\Delta R_n(t) = \Delta R_{n,\infty} - a e^{-bt} \quad (4.7)$$

où  $\Delta R_{n,\infty}$  est la différence de relaxation relative calculée pour  $\Delta HR = HR_{min} - HR_{max}$  lorsque  $t$  tend vers l'infini et  $a$  et  $b$  sont des constantes à déterminer. Par le biais de la formulation d'identification par la méthode des moindres carrés (§4.3.1.2), on identifie l'équation dont la courbe est représentée en trait rouge discontinu sur la Figure 4-17. On admet ainsi l'existence d'une relation analytique entre la fonction de relaxation du bois et l'humidité relative à tout instant  $t$ . Ceci nous amène finalement à proposer, par interpolation linéaire, l'expression suivante :

$$R_n(t, HR) = R_n(t, HR_{min}) - \frac{(HR - HR_{min})}{\Delta HR} (0,0776 + 0,0447e^{-0,08t} - 0,0329e^{-6t}) \quad (4.8)$$

avec  $HR$  en %,  $\Delta HR = 40\%$ ,  $R_n(t, HR_{min})$  étant la fonction de référence ( $HR_{min} = 30\%$ ). Cette dernière pourra être exprimée sous forme d'une série de Dirichlet. Cette équation à deux variables donne, à partir d'une fonction de relaxation de base, l'expression de la fonction de relaxation relative en fonction de l'humidité relative.

Cette expression est comparée aux données expérimentales sur la Figure 4-18 pour trois taux d'humidité relative. Les courbes expérimentales sont en traits continus et les courbes analytiques en pointillés. On constate que l'expression proposée représente efficacement la variation de la fonction de relaxation relative en fonction de l'humidité relative.



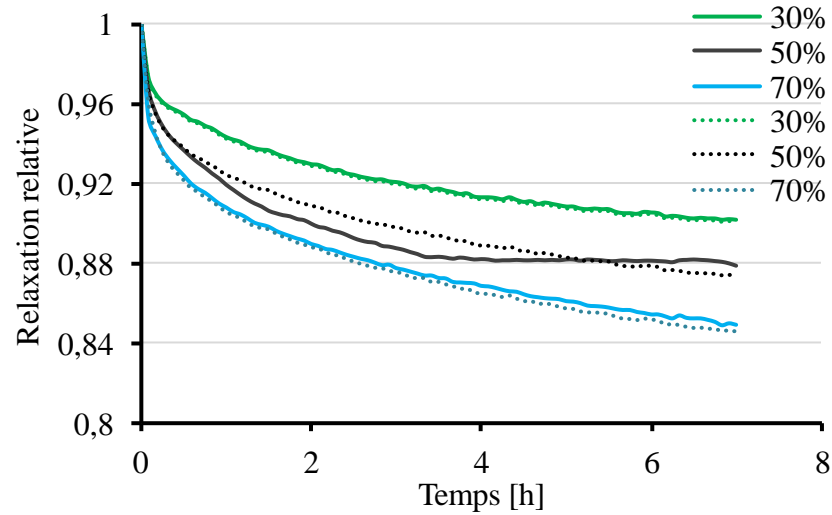


Figure 4-18 : Comparaison entre l'expression analytique (4.8) (traits pointillés) et les courbes expérimentales (traits continus).

On peut retrouver la fonction de relaxation en multipliant la fonction de relaxation relative par le module d'élasticité instantané de l'échantillon qui varie en fonction de l'humidité relative. Ainsi, on trace au cours du temps la courbe de relaxation pour des taux d'humidité relative variant de 30% à 70% à l'aide de l'équation (4.8), Figure 4-19 (a), et on déduit les courbes de fluage par la méthode d'inversion numérique, Figure 4-19 (b).

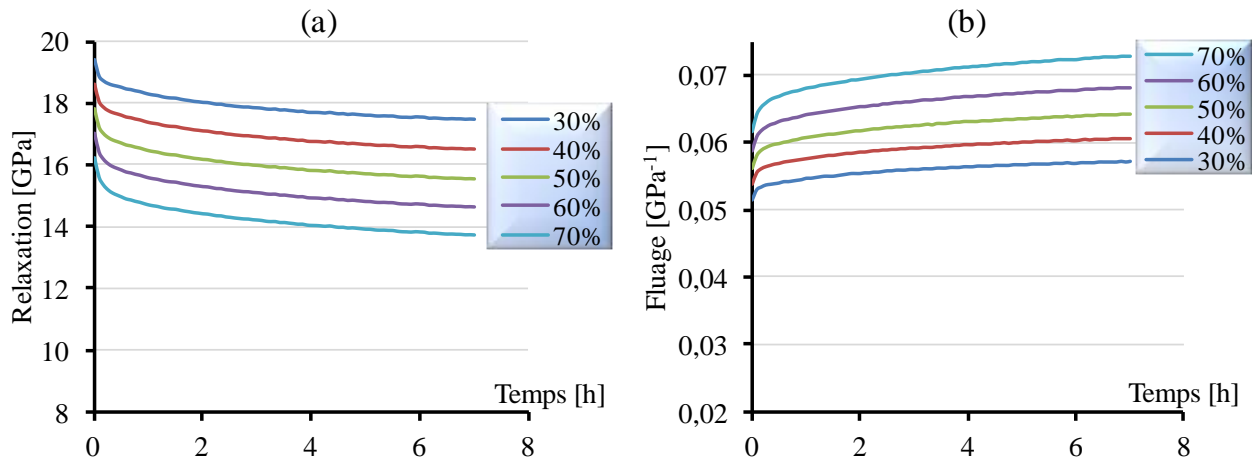


Figure 4-19 : Variation au cours du temps à différents taux d'humidité relative des : (a) courbes de relaxation (b) courbes de fluage.

De façon duale, on obtient une expression de la fonction de fluage en fonction du temps et de l'humidité relative en calculant l'écart entre les courbes de fluage obtenues par inversion pour 30% et 70% d'humidité relative. L'équation liant la fonction de fluage relatif et l'humidité relative s'exprime comme suit

$$J_n(t, HR) = J_n(t, HR_{min}) + \frac{(HR - HR_{min})}{\Delta HR} (0,0835 - 0,0516e^{-0,2t} - 0,0319e^{-5,5t}) \quad (4.9)$$

Un des avantages de l'identification d'un modèle rhéologique est de pouvoir extrapoler la fonction de relaxation sur une durée plus longue que la durée du test réalisé. On trace ainsi la courbe pour une

durée de 24h à partir des paramètres du modèle de Maxwell à 3 branches correspondant à une humidité relative de 30%. La Figure 4-20 présente des courbes de relaxation relative pour des taux d'humidité relative compris entre 30% et 70%. Les courbes en trait gras continu sont calculées par interpolation à partir des essais et les courbes en trait fin discontinu représentent les fonctions de relaxation extrapolées à l'aide du modèle de Maxwell.

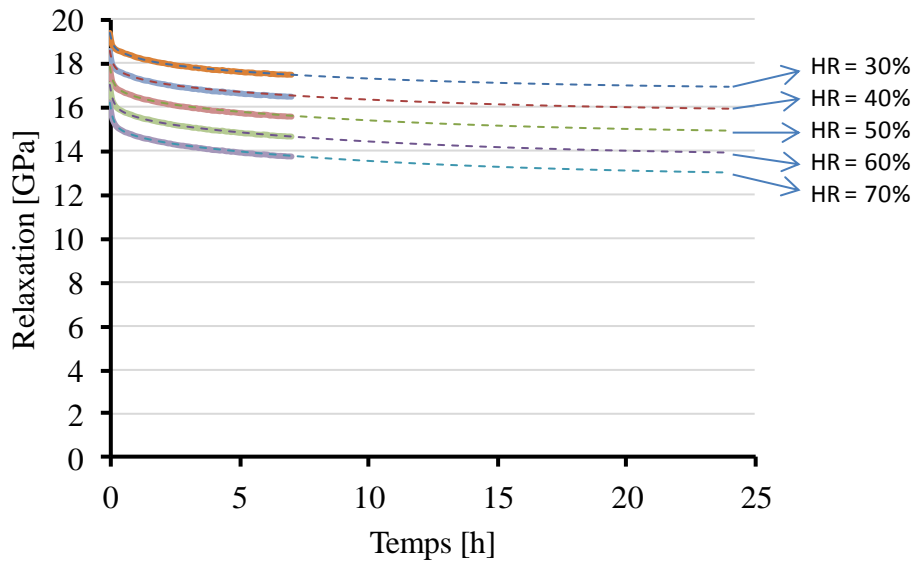


Figure 4-20 : Fonctions de relaxation à différents taux d'humidité relative.

On remarque que les courbes déterminées par interpolation basées sur les essais expérimentaux et les courbes lissées par le modèle de Maxwell sont parfaitement superposées. De plus, on constate qu'au bout de 24h, les courbes ont tendance à se stabiliser vers une asymptote horizontale dont l'équation s'écrit en fonction de l'humidité relative :

$$R_n(t, HR) = E_0(HR_{min}) - \frac{(HR - HR_{min})}{\Delta HR} (0,0776) \quad (4.10)$$

avec  $E_0(HR_{min})$  le module d'élasticité du ressort seul dans le modèle de Maxwell identifié pour l'humidité relative de référence  $HR_{min}$ .

#### 4.4 Conclusion

Dans ce chapitre, les essais de caractérisation hydrique, ainsi que les essais préliminaires de caractérisation mécanique instantanés et différés ont été présentés. Ces premiers résultats ont permis d'établir une relation linéaire entre le module d'élasticité et l'humidité relative. A travers l'analyse des résultats des essais viscoélastiques, on a constaté que l'humidité relative a un double effet sur le comportement viscoélastique du bois : sur le module d'élasticité d'une part et sur la fonction de relaxation relative d'autre part. L'analyse des essais à différents paliers de sollicitations a permis de définir le domaine de linéarité du comportement viscoélastique en fonction du taux d'humidité relative. À partir des données expérimentales, des modèles rhéologiques ont été identifiés en relaxation et en fluage à l'aide de la méthode d'identification des paramètres basée sur la méthode des moindres carrés. Enfin, deux expressions ont été établies qui permettent d'exprimer les fonctions de relaxation et de fluage en fonction du temps et de l'humidité relative. Ces résultats nous seront utiles pour l'interprétation des essais mécanosorptifs dans le chapitre suivant.



## Chapitre 5. ESSAIS MECANOSORPTIFS

On rappelle qu'un essai mécanosorptif est un essai au cours duquel le matériau sous contrainte constante ou variable subit des variations d'humidité. Dans ce qui suit, on présente les résultats obtenus pour deux essais de relaxation en déformation imposée constante et humidité variable, puis pour un essai de fluage sous contrainte et humidité variant de façon cyclique. Pour interpréter ces essais, on utilise l'hypothèse de partition de la contrainte ou de la déformation pour isoler l'effet hygroverrou. L'analyse de ce dernier résultat permettra finalement de proposer un modèle représentatif du comportement mécanosorptif observé.

### 5.1 Essais à humidité variable en déformation bloquée

L'essai consiste à bloquer les déplacements aux extrémités de l'échantillon et à faire varier l'humidité relative dans la cellule. On mesure la contrainte résultante tout en gardant l'échantillon bloqué. Deux scénarios de variation de l'humidité relative sont appliqués. Dans le premier, on stabilise l'échantillon dans son état libre pour une ambiance à 30 % d'humidité relative, puis on bloque l'échantillon. On applique ensuite deux cycles d'humidité relative à 50% et 70%, Figure 5-1 (a). Le deuxième scénario consiste à bloquer l'échantillon après l'avoir stabilisé pour une humidité relative de 70%. On applique par la suite deux cycles à 50% puis deux cycles à 30% de façon consécutive, Figure 5-1 (b). La durée de chaque cycle est d'environ 1h45, cette durée ayant été trouvée comme suffisante pour assurer l'équilibre hydrique de l'échantillon.

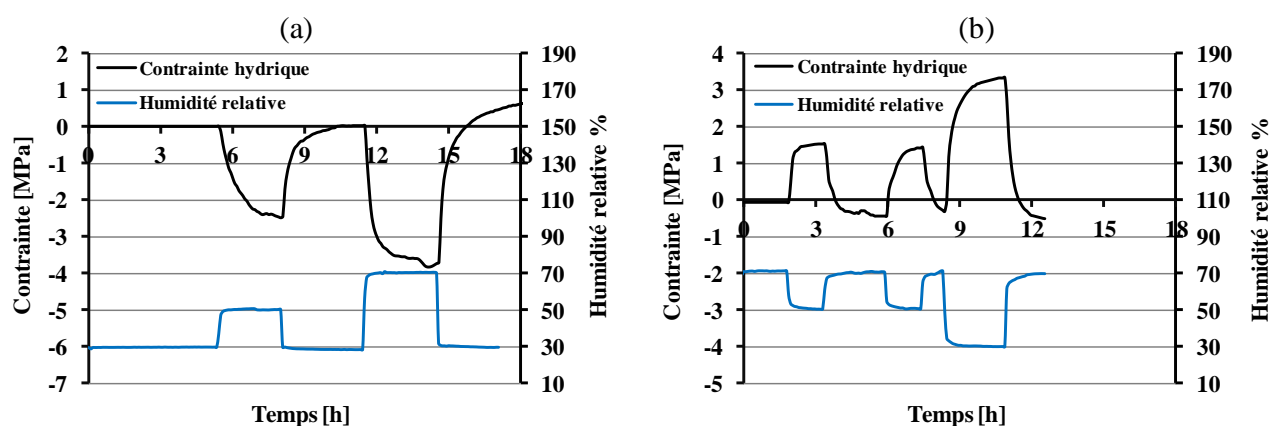


Figure 5-1 : Diagrammes des contraintes hydriques en fonction du temps.

Pour chacun des deux scénarios, à la fin du premier cycle, on constate l'apparition d'une contrainte de signe opposé. Ces contraintes varient en fonction du nombre et de l'amplitude des cycles. Ceci peut s'expliquer par la différence entre le comportement du bois en traction et en compression. Ce phénomène est très complexe à interpréter car il combine plusieurs phénomènes tels que l'effet de relaxation-effacement qui se produit dans l'échantillon, l'effet du second ordre compte tenu de l'élancement de l'échantillon comprimé et l'effet hygroverrou.

## 5.2 Essais mécanosorptifs en relaxation à déformation imposée constante

### 5.2.1 Présentation des résultats

Deux essais mécanosorptifs en relaxation à déformation imposée constante sont effectués sur l'échantillon P24-5. Le premier essai est réalisé à *HR* cyclée entre 30% et 50% puis entre 30% et 70%. Le deuxième est réalisé à *HR* cyclée entre 30% et 50% puis entre 30% et 70%, appliquée une fois en phase de relaxation puis répétée en phase d'effacement. Les résultats sont présentés et discutés dans les paragraphes suivants.

#### 5.2.1.1 Cycle d'humidification/séchage à partir d'un état « sec »

Dans un premier temps, l'échantillon est mis en équilibre à 30% d'humidité relative. On impose pendant 17h une déformation qui correspond à 10% de la contrainte de rupture de l'échantillon (Figure 5-2 (c)). Cette déformation est ensuite annulée durant les 19h suivantes. Deux cycles d'humidité relative (30%-50% puis 30%-70%) sont imposés durant la phase de relaxation et la phase d'effacement (Figure 5-2 (b)). La courbe de la contrainte résultante est présentée en trait continu noir sur la Figure 5-2 (a).

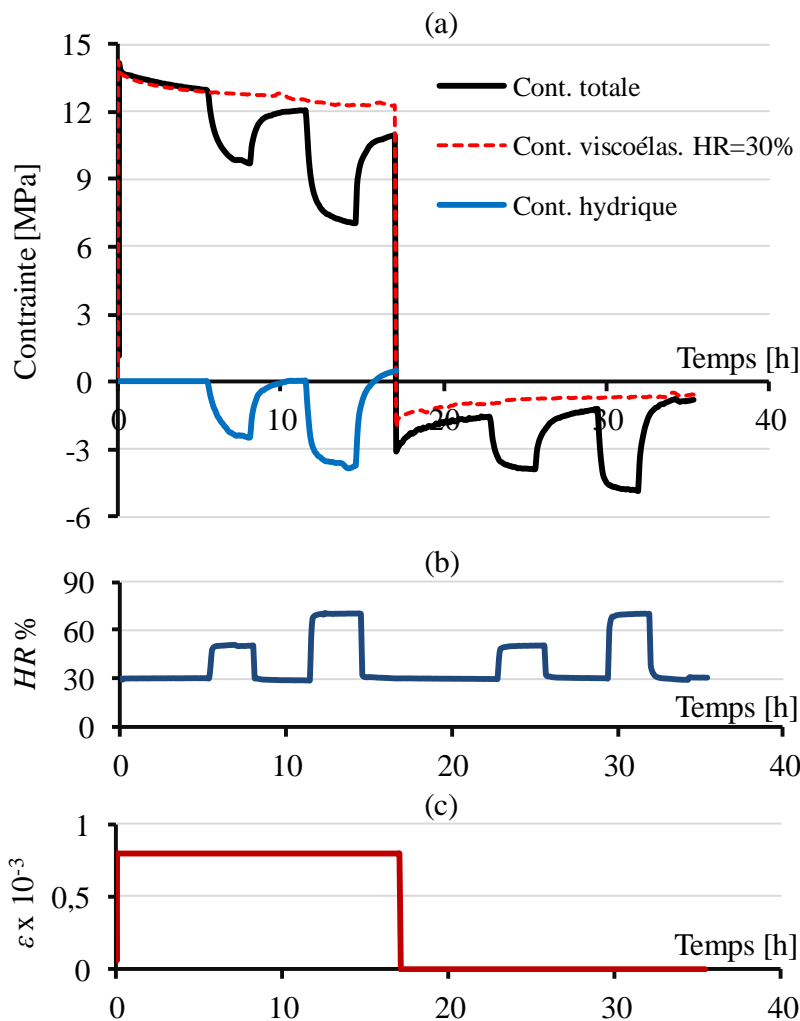


Figure 5-2 : Essai de relaxation-effacement (*HR* = 30%, trait pointillé rouge) ; Essai mécanosorptif (trait noir) ; Contrainte hydrique (a) ; Humidité relative (b) ; Déformation imposée (c).

On reporte sur cette même figure le résultat de l'essai de relaxation-effacement réalisé sur le même échantillon à une humidité relative de 30% et avec le même niveau de sollicitation. Le résultat de cet essai a déjà été présenté sur la Figure 4-10 (a). Cette courbe est représentée sur la Figure 5-2 (a) par la ligne rouge discontinue. Enfin, on reporte sur cette même figure (trait bleu continu) la contrainte hydrique mesurée sur le même échantillon pour le même cycle d'humidité relative, et déjà présenté sur la Figure 5-1 (a).

En comparant les deux résultats de la Figure 5-2 (a) (courbes à humidité constante et à humidité variable), on remarque qu'en phase de relaxation le retour de la contrainte sous humidité variable est partiel par rapport à la courbe de relaxation à humidité constante. Cet écart augmente avec l'amplitude du cycle de séchage. L'écart est conservé lors de l'annulation de la déformation au début de la phase d'effacement. Il est partiellement récupéré après le premier cycle d'humidité relative à 50% et quasiment totalement récupéré après le deuxième cycle d'humidité relative à 70%.

Dans cet essai, l'écart de contrainte qui s'est créé lors du cycle d'humidité relative peut être attribué à un phénomène de mécanosorption. La récupération de cet écart indique la capacité du matériau à annuler l'effet mécanosorptif par une sorte d'effet mémoire [DUB 12].

#### **5.2.1.2 Cycle de séchage/humidification à partir d'un état « humide »**

Le second essai est réalisé sous humidité relative variable après mise à l'équilibre hydrique initial de l'échantillon. On impose pendant 20h la même déformation qu'à l'essai précédent, Figure 5-3 (c) ; cette déformation est ensuite annulée durant les 20h suivantes. On impose deux cycles d'humidité relative (30%-50%) puis deux autres cycles de (30%-70%) durant la phase de relaxation. Durant la phase d'effacement, les mêmes cycles hydriques sont imposés (Figure 5-3 (b)). La courbe de la contrainte résultante est présentée en trait noir sur la Figure 5-3 (a). Sur le même échantillon, la contrainte hydrique, mesurée pour les mêmes variations hydriques, est présentée sur la Figure 5-2 (b) en trait bleu. En l'absence d'un essai expérimental en relaxation sur le même échantillon à une humidité relative de 70%, on simule l'essai à partir du modèle analytique obtenu via le modèle de Maxwell (§ 4.3.1.2) ; la courbe résultante est présentée sur la Figure 5-3 (a) en trait rouge discontinu.

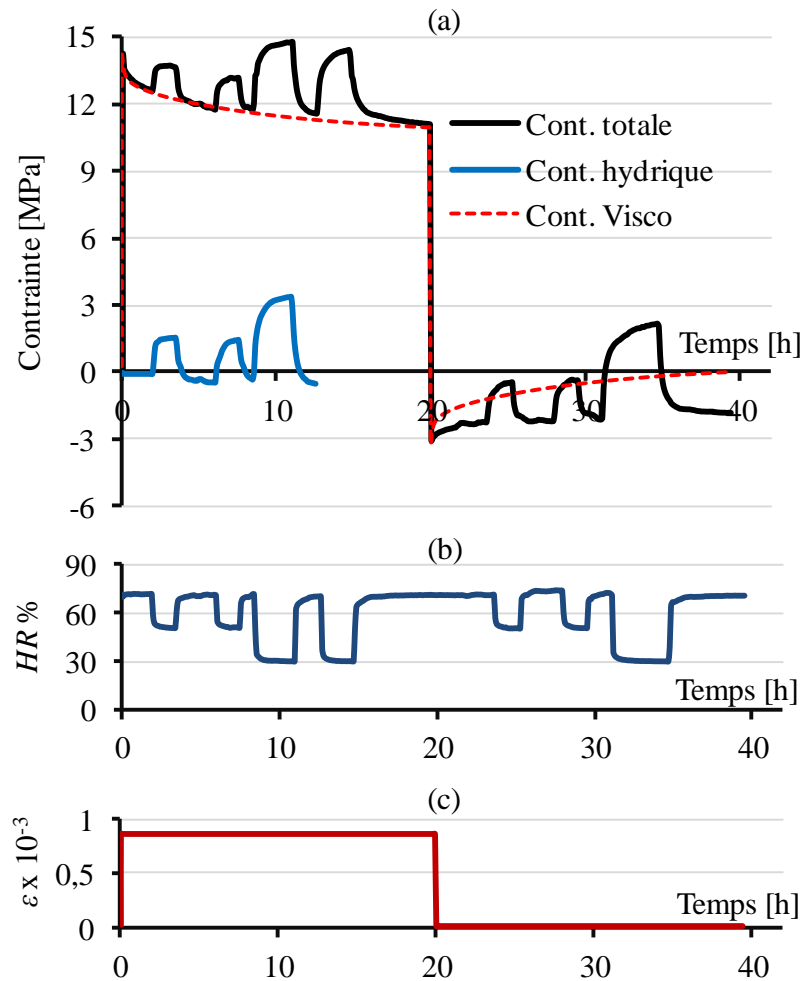


Figure 5-3 : Essai de relaxation-effacement ( $HR = 30\%$ , trait pointillé rouge) ; Essai mécanosorptif (trait noir) ; Conainte hydrique (a) ; Humidité relative (b) ; Déformation imposée (c).

En comparant les courbes mécanosorptive et viscoélastique, on remarque que l'état de conainte revient à la courbe viscoélastique à humidité relative constante après chaque cycle. On observe une conainte résiduelle qui perdure au bout de 20h d'effacement.

Pour interpréter ces résultats, on utilise le principe de partition de la conainte, ce qui nécessite de calculer la conainte viscoélastique sous les mêmes cycles d'humidité relative en utilisant les modèles développés au chapitre précédent. Compte tenu du manque de données expérimentales sur le comportement viscoélastique du bois en compression, dans ce qui suit on se focalise sur l'analyse des résultats en phase de relaxation au cours de laquelle l'échantillon est sollicité en traction.

### 5.2.2 Conainte viscoélastique à humidité relative variable

Tel que montré dans le chapitre précédent, la fonction de relaxation est dépendante non seulement du temps, mais aussi de l'état hydrique du matériau. On note  $R_{HR_i}(t_0, t)$  la fonction de relaxation à l'état d'équilibre hydrique sous l'humidité relative  $HR_i$ .

Étant dans le domaine de la viscoélasticité linéaire, on utilise le principe de superposition pour le calcul de la conainte viscoélastique lors d'une variation d'humidité relative : on procède par soustraction du même chargement sous la précédente fonction de relaxation à l'instant de

changement d'humidité relative et on ajoute le même chargement à compter de cet instant avec la nouvelle fonction de relaxation.

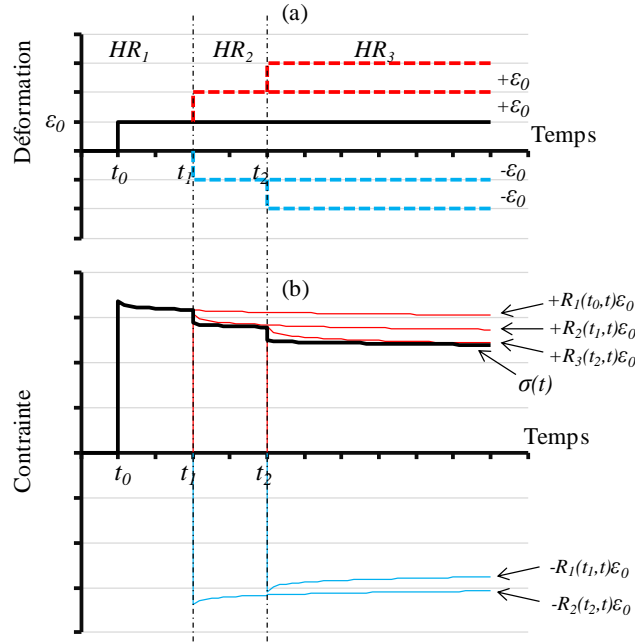


Figure 5-4 : Illustration de l'application du principe de superposition pour la simulation du comportement en relaxation sous humidité variable et déformation constante.

La Figure 5-4 illustre l'exemple d'une variation d'humidité relative dans le cas d'une déformation imposée constante avec  $HR_1 < HR_2 < HR_3$ . Le comportement du matériau dépend à chaque instant d'une fonction de relaxation  $R_{HR_i}$  qui correspond au taux d'humidité relative  $HR_i$ . On obtient ainsi la généralisation de la loi de comportement en relaxation sous déformation constante  $\varepsilon_0$  avec plusieurs paliers d'humidité relative, comme suit :

$$\sigma(t) = \tilde{R}(t, t_0) \varepsilon_0 \quad (5.1)$$

avec

$$\forall t \in [t_j, t_{j+1}[ \quad \tilde{R}(t, t_0) = R_1(t, t_0) + \sum_{i=2}^{j+1} [-R_{i-1}(t, t_{i-1}) + R_i(t, t_{i-1})] \quad (5.2)$$

Rapportée aux fonctions de relaxation relative, l'expression (5.1) devient :

$$\sigma(t) = E_{inst} \tilde{R}_n(t_0, t) \varepsilon_0 \quad (5.3)$$

avec

$$\forall t \in [t_j, t_{j+1}[ \quad \tilde{R}_n(t, t_0) = R_{n,1}(t, t_0) + \sum_{i=2}^{j+1} [-R_{n,i-1}(t, t_{i-1}) + R_{n,i}(t, t_{i-1})] \quad (5.4)$$

Pour le calcul de la contrainte viscoélastique, on utilise les valeurs du module d'élasticité instantané calculé pour le même échantillon pour HR=30% et 70%.



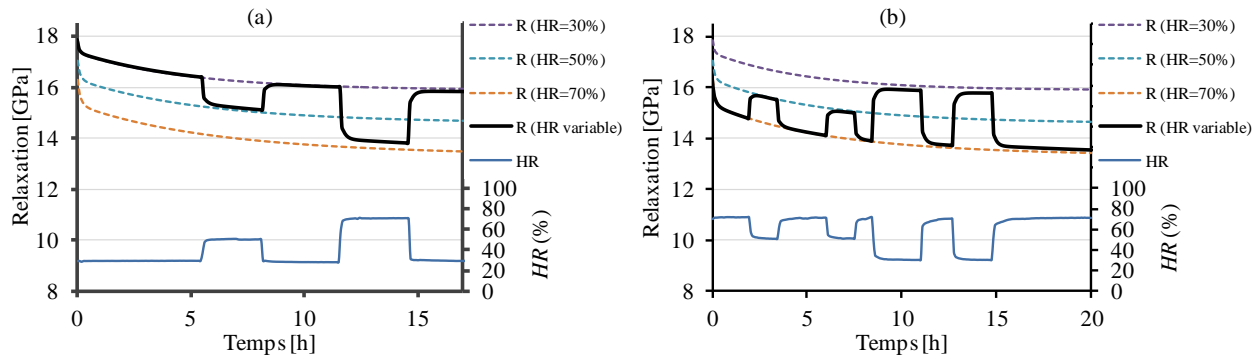


Figure 5-5 : Courbes de relaxation à humidité relative variable.

Les Figure 5-5 (a) et (b) représentent les courbes de relaxation  $\tilde{R}(t_0, t)$  (trait noir) ainsi obtenues pour les deux cycles de variation d'humidité relative (trait bleu) des deux essais mécanosorptifs. Les traits discontinus présentent les fonctions de relaxation à humidité relative constante  $R_{HR_i}$ . On remarque que le passage de la fonction de relaxation d'un taux d'humidité  $HR_i$  à  $HR_{i+1}$  se fait initialement de façon rapide puis converge progressivement vers la courbe  $R_{HR_{i+1}}$ .

### 5.2.3 Contrainte hygroverrou

On définit la contrainte réduite résultant de la différence entre la contrainte totale mesurée et la contrainte hydrique présentée à la Figure 5-6 (a) en trait bleu. On remarque, pour le premier cycle, une diminution de la contrainte réduite lors de la première humidification suivie d'une légère diminution lors du séchage (retour à 30% d'humidité relative). Pour le deuxième cycle, en phase d'humidification, une nouvelle diminution de la contrainte réduite plus importante que la première est observée et quasiment pas de variation (blocage) de la contrainte réduite lors du séchage (retour à 30% d'humidité relative).

Par ailleurs, on note que dans un matériau viscoélastique ne présentant pas de comportement hygroverrou, en se référant à l'hypothèse de partition de la contrainte, la contrainte réduite serait équivalente à la contrainte viscoélastique à humidité variable. En revanche, ici la comparaison de la courbe de contrainte viscoélastique à celle de la contrainte réduite (Figure 5-6 (a)) trahit la présence d'une contrainte hygroverrou. Ainsi, par soustraction de ces deux courbes, on déduit la courbe hygroverrou en trait vert, Figure 5-6 (a).

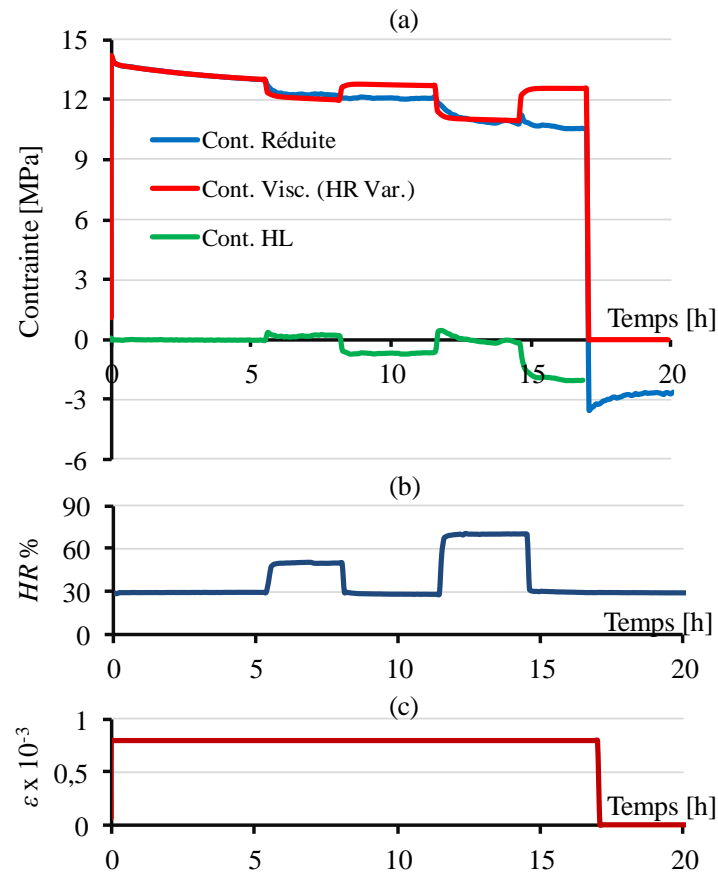


Figure 5-6 : Essai 1 - courbes de la contrainte réduite (trait bleu), viscoélastique (trait rouge), hygroverrou (trait vert) (a); Évolution de l'humidité relative (b); Déformation imposée (c).

On constate que la contrainte hygroverrou est nulle avant toute variation d'humidité relative. Pour le premier cycle, elle apparaît très légèrement lors de la première humidification et augmente ensuite lors du séchage. Au deuxième cycle, elle est quasi nulle lorsqu'on humidifie et se recrée de nouveau avec une amplitude plus importante lors du second séchage. Les pics observés en début des phases d'humidification correspondent aux effets du gradient hydrique non pris en compte dans l'analyse quantitative des résultats.

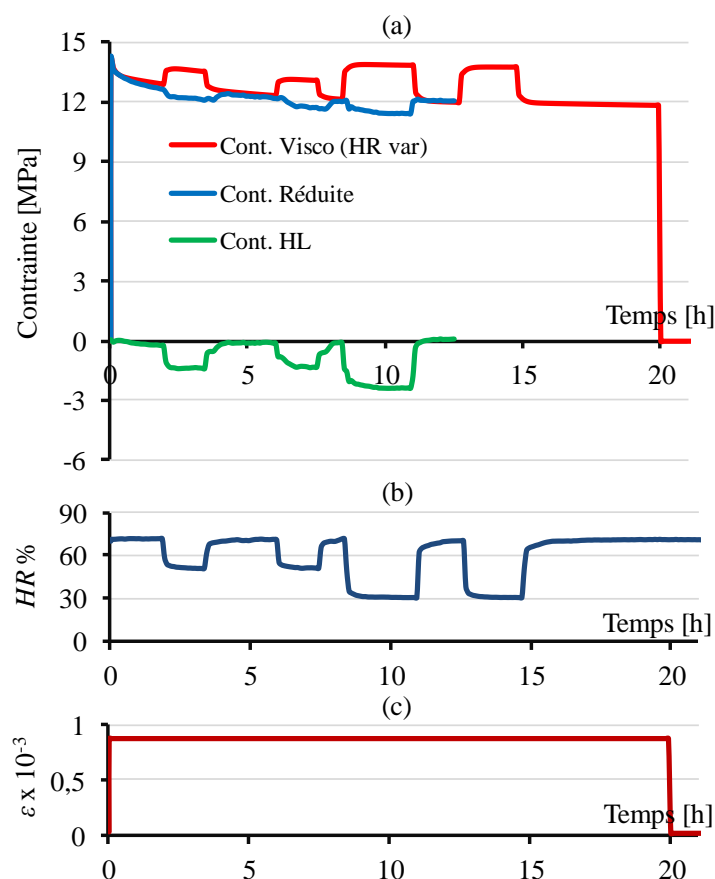


Figure 5-7 : Essai 2 - Courbes de la contrainte réduite (trait bleu), viscoélastique (trait rouge), hygroverrou (trait vert) (a); Évolution de l'humidité relative (b); Déformation imposée (c).

Identiquement au premier essai, la Figure 5-7 présente la courbe de la contrainte viscoélastique sous humidité variable ainsi que les courbes des contraintes réduite et hygroverrou. On remarque que les contraintes réduite et viscoélastique sont superposées lorsque l'échantillon est humide ( $HR = 70\%$ ). Toutefois, une différence apparaît lors des phases de séchage. La contrainte hygroverrou se crée lors du premier séchage à 50% et s'annule lors de l'humidification (retour à  $HR = 70\%$ ). Le même comportement est observé au deuxième cycle. Au 3<sup>ème</sup> cycle, en phase de séchage jusqu'à 30% d'humidité relative, la contrainte hygroverrou est de nouveau créée mais avec une amplitude plus importante et s'annule à nouveau lorsqu'on humidifie.

Pour ce qui concerne la contrainte hygroverrou, les observations précédentes nous permettent de proposer les conclusions suivantes :

- à partir de l'état inerte, l'humidification sous chargement mécanique n'entraîne pas de création de contrainte hygroverrou dans le bois ;
- la contrainte hygroverrou se crée en phase de séchage sous contrainte ;
- sous chargement mécanique, à l'état humide, la contrainte hygroverrou est proportionnelle à la variation d'humidité relative lors du séchage ;
- sous chargement mécanique, à l'état sec, la contrainte hygroverrou est proportionnelle à l'humidité relative maximale atteinte durant la phase qui précède le séchage ;
- sous chargement mécanique, la contrainte hygroverrou est restituée progressivement en phase d'humidification ; elle est totalement récupérée lorsque le bois revient à son état maximal d'humidité depuis le début de la phase de chargement ;

### 5.2.4 Contrainte hygroverrou pseudo-élastique

Les conclusions précédentes nous amènent à proposer un modèle basé sur la création des contraintes hygroverrou qui compensent les variations des contraintes élastiques dues aux variations du module d'élasticité en phase de séchage. Ces contraintes sont ensuite restituées en phase d'humidification. La variation de la contrainte due à une variation du module sous déformation constante  $\varepsilon_0$  s'écrit :

$$\Delta\sigma_e = \Delta E \varepsilon_0 \quad (5.5)$$

avec  $\Delta\sigma_e = \sigma_e(t + \Delta t) - \sigma_e(t)$  et  $\Delta E = E(t + \Delta t) - E(t)$ .

*En phase de séchage* : il n'y a pas de variation de la contrainte réduite, celle-ci est en fait compensée par la mise en place de la contrainte hygroverrou.

$$\Delta\sigma_{HL} = -(E(t + \Delta t) - E(t))\varepsilon_0 \quad (5.6)$$

*En phase d'humidification* : deux cas se présentent

- Si le matériau est inerte (pas de  $\sigma_{HL}$ ), il n'y a pas de variation de la contrainte hygroverrou ( $\Delta\sigma_{HL} = 0$ ) ;
- Si l'échantillon possède une contrainte hygroverrou emmagasinée, une annulation progressive de celle-ci est observée ; l'annulation est totale lorsque le matériau revient à l'humidité relative maximale au début du chargement, ce qui correspond à un module d'élasticité  $\bar{E}(t)$ . La variation de la contrainte hygroverrou suit alors la loi suivante :

$$\Delta\sigma_{HL} = -(E(t + \Delta t) - \bar{E}(t))\varepsilon_0 \quad (5.7)$$

Les courbes en traits discontinus de la Figure 5-8 sont obtenues à partir des équations (5.6) et (5.7).

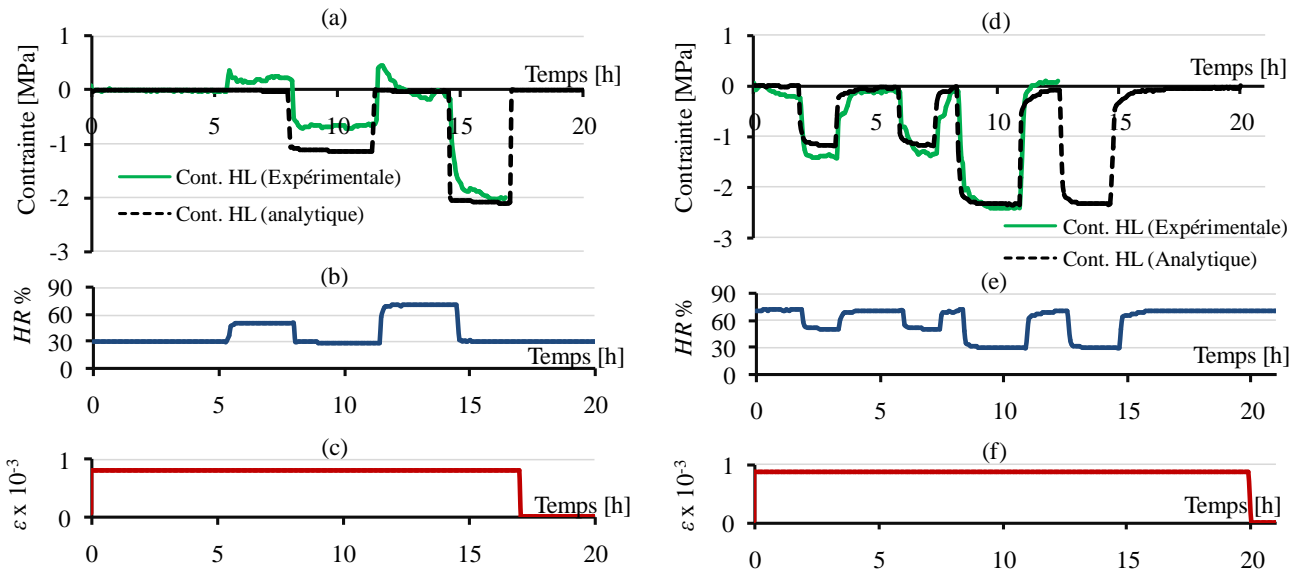


Figure 5-8 : Variations au cours du temps de (a/d) la contrainte hygroverrou expérimentale (trait vert) et la contrainte hygroverrou analytique (trait noir discontinu) (b/e) humidité relative ; (c/f) déformation imposée.

La comparaison des courbes expérimentales et analytiques, pour un échantillon initialement sec (Figure 5-8 (a), (b) et (c)) et pour un échantillon initialement humide (Figure 5-8 (d), (e) et (f)), montre la validité du modèle proposé. Cependant, une interrogation subsiste quant à la validité de ce

modèle en fluage et dans le cas d'un chargement mécanique variable. Le paragraphe suivant vise à apporter une réponse à cette question.

### 5.3 Essai mécanosorptif à contrainte et humidité variables

#### 5.3.1 Description de l'essai

On réalise un essai mécanosorptif sur une durée totale de 24h. On soumet l'échantillon P24-2 à un chargement constitué d'une succession de paliers d'humidité relative compris entre 30% et 70% et d'une série de paliers de contrainte de traction compris entre 10,6 et 16 MPa, ce qui correspond respectivement à 8% et 12 % de la contrainte de rupture. Les hauteurs des paliers de contrainte sont fixées de manière à suivre un tracé sinusoïdal. Chaque palier dure environ 2h de manière à former 1,5 cycle sur une période de 24h (Figure 5-9 (a) et (b)), avec un déphasage de 1h45 de manière à assurer l'équilibre hydrique avant chaque modification de contrainte et à différencier les deux effets sur la courbe résultat (Figure 5-9 (c)).

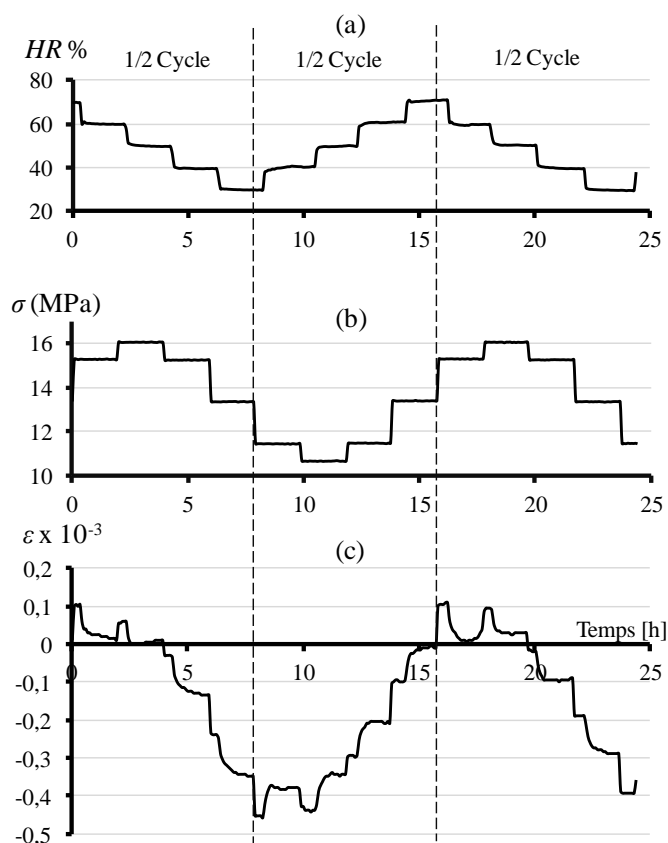


Figure 5-9 – Essai mécanosorptif sous contrainte et humidité variables.

La Figure 5-9 (c) présente l'évolution de la déformation totale mesurée au cours de l'essai. On a séparé les trois demi-cycles par les traits discontinus verticaux, le premier demi-cycle étant une phase de séchage. On observe que l'évolution de la déformation est sensiblement identique pour les demi-cycles 1 et 3 (séchage), avec une pente moyenne plus raide que durant le demi-cycle 2 (humidification). Ceci indique une différence de comportement du bois sous contrainte en séchage et en humidification, résultant de la combinaison de l'effet mécanosorptif et de l'hystérésis constatée sur les courbes de sorption (Figure 4-1).

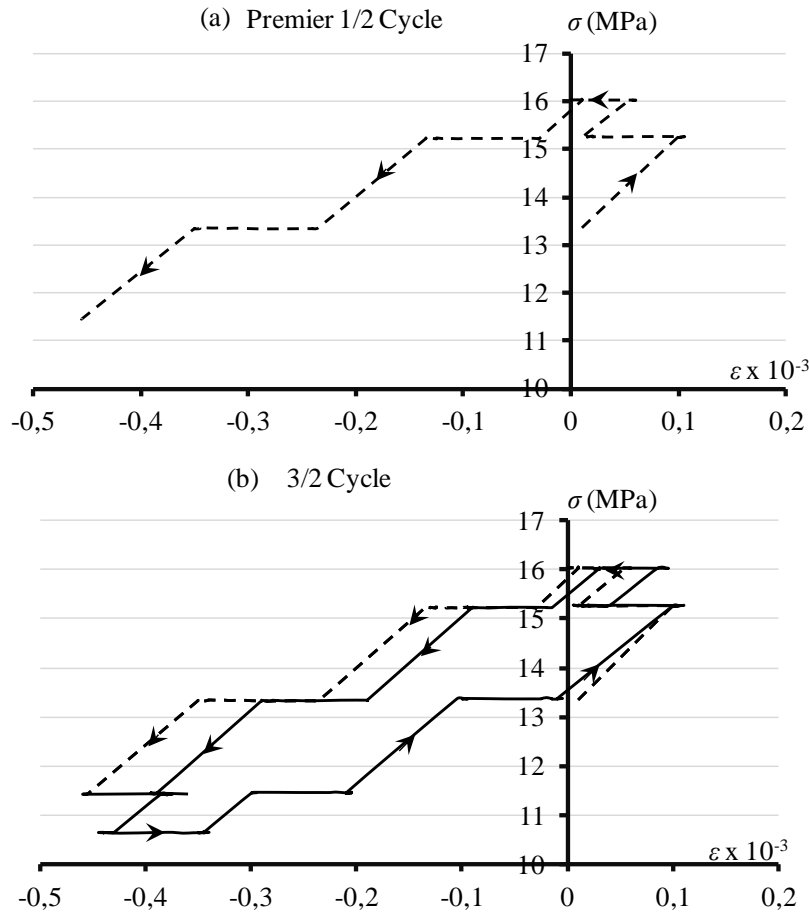


Figure 5-10 : Courbes contrainte-déformation : du premier demi-cycle(a) ; des trois demi-cycles (b).

La Figure 5-10 (a) présente la réponse du premier demi cycle sous la forme d'un diagramme contrainte-déformation. La Figure 5-10 (b) présente les trois demi-cycles, la ligne pointillée correspond au premier demi-cycle (séchage) et la ligne continue représente le cycle suivant. Chaque segment oblique correspond à la variation de déformation élastique  $\Delta \varepsilon_e^\sigma$  provoquée par la variation de la contrainte. Chaque segment horizontal correspond à un palier de contrainte. La variation de déformation correspondante résulte de la combinaison de la déformation de fluage sous contrainte constante, de la déformation hydrique lors de la variation d'humidité relative, de la déformation induite par la variation du module due à la variation de l'humidité relative et enfin de la variation de la déformation hygroverrou éventuelle.

### 5.3.2 Mise en évidence de la déformation hygroverrou

En admettant le principe de partition de la déformation, on représente la variation de la déformation totale comme la somme de la déformation élastique  $\Delta \varepsilon_e$  de la déformation de fluage  $\Delta \varepsilon_v$ , de la déformation hydrique (retrait-gonflement)  $\Delta \varepsilon_w$  et de la déformation hygroverrou  $\Delta \varepsilon_{HL}$  :

$$\Delta \varepsilon = \Delta \varepsilon_e + \Delta \varepsilon_v + \Delta \varepsilon_w + \Delta \varepsilon_{HL} \quad (5.8)$$

En particulier, le fluage combiné à l'effet mécanosorptif a un double effet observé sur la Figure 5-10 (b) : i) translation horizontale de la déformation entre le 1<sup>er</sup> demi-cycle et le cycle suivant, ii) hystérésis observée durant le cycle complet humidification-séchage.

A partir de l'hypothèse de la partition de la déformation, on se propose dans ce qui suit de décomposer la déformation totale afin d'isoler la déformation hygroverrou.

### a. Déformation hydrique

On calcule les variations  $\Delta\varepsilon_w$  de la déformation hydrique en multipliant le coefficient de retrait hydrique  $\alpha_l$  par la variation d'humidité relative  $\Delta HR$  pour chacun des paliers :

$$\Delta\varepsilon_w = \alpha_l \cdot \Delta HR \quad (5.9)$$

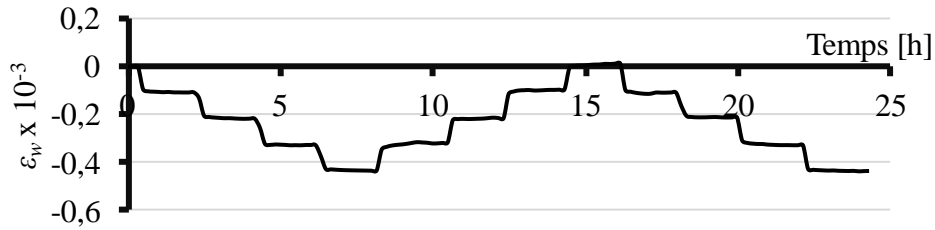


Figure 5-11 : Évolution de la déformation hydrique.

Étant donné que le coefficient de retrait hydrique longitudinal est supposé constant sur l'intervalle d'humidité relative de 30% à 70%, la courbe de la déformation hydrique suit la même forme que celle de l'humidité relative, Figure 5-9 (a) avec un signe négatif compte tenu du fait que le premier demi cycle est une phase de séchage.

### b. Déformations élastique et visqueuse

Le calcul de la déformation viscoélastique due au comportement en fluage sous chargement et humidité variables se fait en application du principe de superposition de Boltzmann. Toutefois, notre objectif est de séparer les deux déformations élastique et visqueuse afin d'expliquer l'évolution de la déformation hygroverrou. On rappelle que la loi de comportement en fluage pour un palier de contrainte  $\sigma_0$  et une humidité relative constante  $HR_i$  s'écrit en fonction de la fonction de fluage  $J_{HR_i}$ .

$$\varepsilon(t) = J_{HR_i}(t, t_0) \sigma_0 \quad (5.10)$$

En introduisant le coefficient de fluage  $\varphi_{HR_i}$ ,  $J_{HR_i}$  de l'équation (5.10) s'écrit :

$$J_{HR_i}(t, t_0) = \frac{1}{E_{HR_i}(t_0)} (1 + \varphi_{HR_i}(t, t_0)) \quad (5.11)$$

avec :

$$\varphi_{HR_i}(t_0, t_0) = 0 \quad \forall t_0 \quad (5.12)$$

La déformation se décompose en parties élastique et viscoélastique de la manière suivante :

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_e(t_0) + \varepsilon_v(t) \quad (5.13)$$

avec :

$$\varepsilon_e(t_0) = \frac{\sigma_0}{E_{HR_i}(t_0)} \quad \text{et} \quad \varepsilon_v(t) = \varphi_{HR_i}(t, t_0) \frac{\sigma_0}{E_{HR_i}(t_0)} = \varphi_{HR_i}(t, t_0) \varepsilon_e(t_0) \quad (5.14)$$

Ainsi, on retrouve la loi de Hooke dans l'expression de la déformation élastique. Celle-ci représente la partie non dépendante du temps et n'est fonction que de la contrainte et des variations de l'humidité relative. Par contre, la déformation visqueuse dépend du temps et de l'humidité relative et s'exprime en fonction du coefficient de fluage et de la déformation instantanée.

Pour généraliser la formulation (5.10) pour le calcul de la déformation visqueuse dans le cas de variation d'humidité relative et de contrainte, on utilise le principe de superposition linéaire (Figure 5-12).

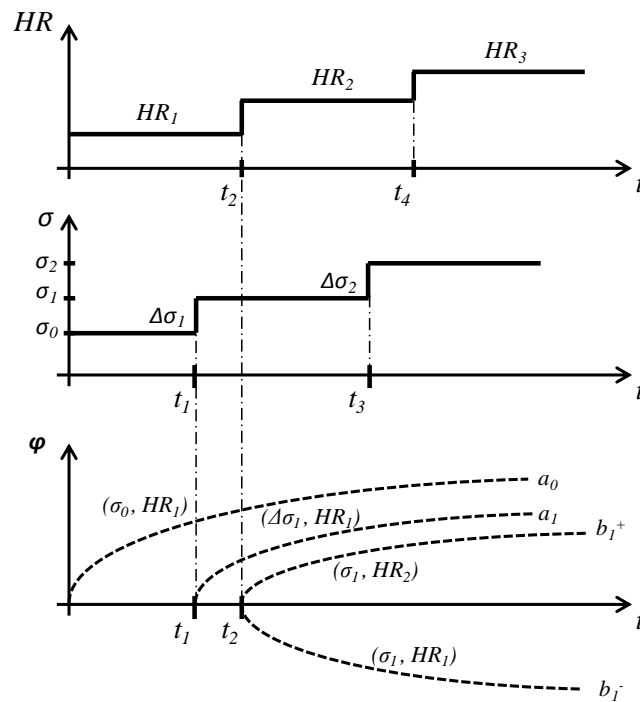


Figure 5-12 : Illustration du principe de superposition pour la détermination de la déformation visqueuse pour différents niveaux de contrainte et d'humidité relative.

Le tableau suivant récapitule les parties constituant les déformations élastique et visqueuse pour chaque palier de chargement et d'humidité relative.



$HR$	$\sigma$	$t$	Courbe	$\varepsilon(t)$	$\varepsilon_e(t)$	$\varepsilon_v(t)$
$HR_1$	$\sigma_o$	0	$(a_0)$	$j_1(t, 0)\sigma_o$	$\sigma_o/E_1$	$\varphi_1(t, 0)\sigma_o/E_1$
	$\sigma_1$	$t_1$	$(a_1)$	$+j_1(t, t_1)\Delta\sigma_1$	$+\Delta\sigma_1/E_1$	$+\varphi_1(t, t_1)\Delta\sigma_1/E_1$
$HR_2$		$t_2$	$(b_1^-)$	$-j_1(t, t_2)\sigma_1$	$-\sigma_1/E_1$	$-\varphi_1(t, t_2)\sigma_1/E_1$
			$(b_1^+)$	$+j_2(t, t_2)\sigma_1$	$+\sigma_1/E_2$	$+\varphi_2(t, t_2)\sigma_1/E_2$
$HR_3$	$\sigma_2$	$t_3$	$(a_2)$	$+j_2(t, t_3)\Delta\sigma_2$	$+\Delta\sigma_2/E_2$	$+\varphi_2(t, t_3)\Delta\sigma_2/E_2$
			$(b_2^-)$	$-j_2(t, t_4)\sigma_2$	$-\sigma_2/E_2$	$-\varphi_2(t, t_4)\sigma_2/E_2$
			$(b_2^+)$	$+j_3(t, t_4)\sigma_2$	$+\sigma_2/E_3$	$+\varphi_3(t, t_4)\sigma_2/E_3$
	$\sigma_3$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
			$t_4$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$\dots$	$\sigma_i$	$t_{2i-1}$	$(a_i)$	$+j_i(t, t_{2i-1})\Delta\sigma_i$	$+\Delta\sigma_i/E_i$	$+\varphi_i(t, t_{2i-1})\Delta\sigma_i/E_i$
$HR_j$		$t_{2i}$	$(b_i^-)$	$-j_i(t, t_{2i})\sigma_i$	$-\sigma_i/E_i$	$-\varphi_i(t, t_{2i})\sigma_i/E_i$
			$(b_i^+)$	$+j_j(t, t_{2i})\sigma_i$	$+\sigma_i/E_j$	$+\varphi_j(t, t_{2i})\sigma_i/E_j$
	$\sigma_j$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$

Tableau 5-1 : Différents termes résultant du principe de superposition appliqué à la loi de comportement viscoélastique en fluage sous humidité relative et chargement variables.

Dans le cas d'un chargement et d'une humidité relative variables, la déformation viscoélastique se généralise à l'instant  $t$  par l'expression suivante :

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_e(t) + \varepsilon_v(t) \quad (5.15)$$

avec

$$\varepsilon_e(t) = \frac{\sigma_0}{E_1} + \sum_{i \geq 1} \frac{\Delta\sigma_i}{E_i} + \sum_{i \geq 1} \left( \frac{1}{E_{i+1}} - \frac{1}{E_i} \right) \sigma_i = \frac{\sigma(t)}{E(t)} \quad (5.16)$$

et

$$\varepsilon_v(t) = \frac{\varphi_1(t, 0)}{E_1} \sigma_0 + \sum_{i \geq 1} \frac{\varphi_i(t, t_{2i-1})}{E_i} \Delta\sigma_i + \sum_{i \geq 1} \left( \frac{\varphi_{i+1}(t, t_{2i})}{E_{i+1}} - \frac{\varphi_i(t, t_{2i})}{E_i} \right) \sigma_i \quad (5.17)$$

Lors de l'essai, la mesure de la déformation débute au moment du déclenchement de l'essai. La déformation mesurée est donc donnée par :

$$\varepsilon_{mes}(t) = \varepsilon(t) - \varepsilon(t_1^-) = \varepsilon_{e,mes}(t) + \varepsilon_{v,mes}(t) \quad (5.18)$$

avec

$$\varepsilon_{e,mes}(t) = \varepsilon_e(t) - \varepsilon_e(t_1^-) \quad \text{où} \quad \varepsilon_e(t_1^-) = \frac{\sigma_0}{E_1} \quad (5.19)$$

et

$$\varepsilon_{v,mes}(t) = \varepsilon_v(t) - \varepsilon_v(t_1^-) \quad \text{où} \quad \varepsilon_v(t_1^-) = \frac{\varphi_1(t_1,0)}{E_1} \sigma_o \quad (5.20)$$

Dans ces expressions,  $\varepsilon(t_1^-)$ ,  $\varepsilon_e(t_1^-)$  et  $\varepsilon_v(t_1^-)$  représentent respectivement la déformation totale, élastique et visqueuse préexistant au début de l'essai.

Par conséquent, en combinant, d'une part (5.17) et (5.20) et d'autre part (5.18) et (5.21), la déformation viscoélastique se décompose en une part élastique, régie par la loi de Hooke et en une part visqueuse selon les équations suivantes :

$$\varepsilon_{e,mes}(t) = \sum_{i \geq 1} \frac{\Delta \sigma_i}{E_i} + \sum_{i \geq 1} \left( \frac{1}{E_{i+1}} - \frac{1}{E_i} \right) \sigma_i = \frac{\sigma(t)}{E(t)} - \frac{\sigma_o}{E_1} \quad (5.21)$$

et

$$\varepsilon_{v,mes}(t) = \frac{\varphi_1(t,0) - \varphi_1(t_1,0)}{E_1} \sigma_o + \sum_{i \geq 1} \frac{\varphi_i(t, t_{2i-1})}{E_i} \Delta \sigma_i + \sum_{i \geq 1} \left( \frac{\varphi_{i+1}(t, t_{2i})}{E_{i+1}} - \frac{\varphi_i(t, t_{2i})}{E_i} \right) \sigma_i \quad (5.22)$$

On utilise les données expérimentales présentées dans le chapitre précédent pour le calcul des courbes des déformations élastique et visqueuse. La variation du module d'élasticité et celle de la déformation élastique sont présentées sur la Figure 5-13. On remarque que la déformation élastique dépend, en plus du chargement mécanique, de la variation du module d'élasticité en fonction de l'humidité relative, Figure 5-13 (b).

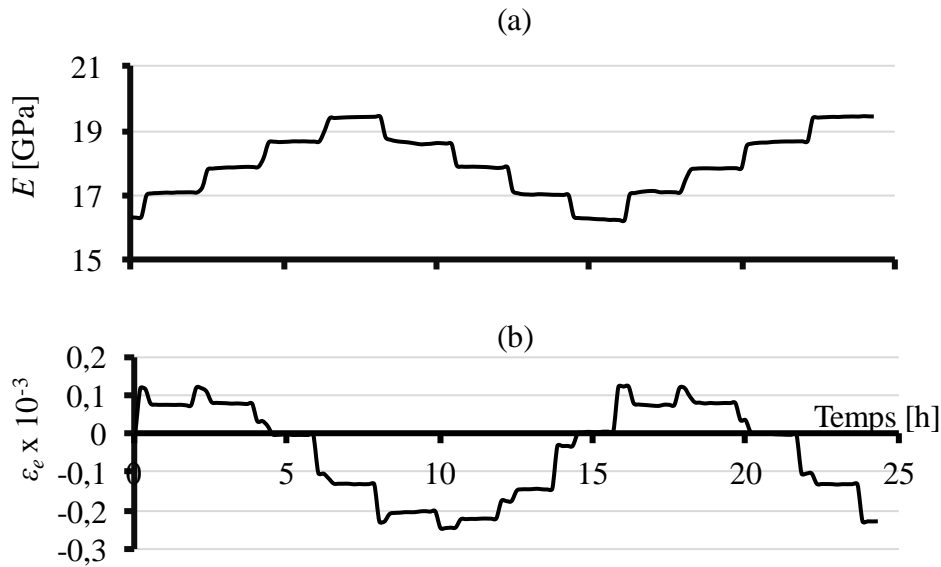


Figure 5-13 : Évolution du module d'élasticité au cours de l'essai (a) ; Évolution de la déformation élastique (b).

L'évolution de la déformation visqueuse est calculée à l'aide de l'équation (5.22) en tenant compte des variations d'humidité relative (Figure 5-9 (a)) et des chargements mécaniques (Figure 5-9 (b)). Elle est présentée à la Figure 5-14.

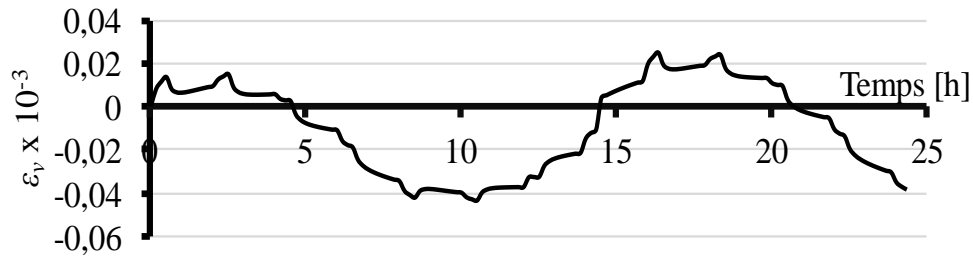


Figure 5-14 : Évolution de la déformation visqueuse.

Comparativement aux déformations hydrique (Figure 5-11) et élastique (Figure 5-13 (b)), la déformation visqueuse est relativement faible. Son amplitude est de l'ordre de 20% de la déformation élastique. Une légère dérive dans le sens positif est constatée, il se justifie par le fait que la contrainte moyenne est positive pendant tout l'essai.

### c. Déformation hygroverrou

Enfin, en application de l'hypothèse de partition de la déformation (5.8), on déduit la déformation hygroverrou par soustraction des parties hydrique, élastique et visqueuse de la déformation totale mesurée :

$$\varepsilon_{HL} = \varepsilon - \varepsilon_w - \varepsilon_e - \varepsilon_v \quad (5.23)$$

La courbe d'évolution de la déformation hygroverrou au cours du temps est présentée sur la Figure 5-15 (c). Elle prend la forme inverse de l'humidité relative selon des paliers formant une fonction cyclique sur 1,5 cycle. Les pics présents au début de ces paliers peuvent être interprétés par l'effet de diffusion hydrique qui n'a pas été pris en considération dans notre analyse.

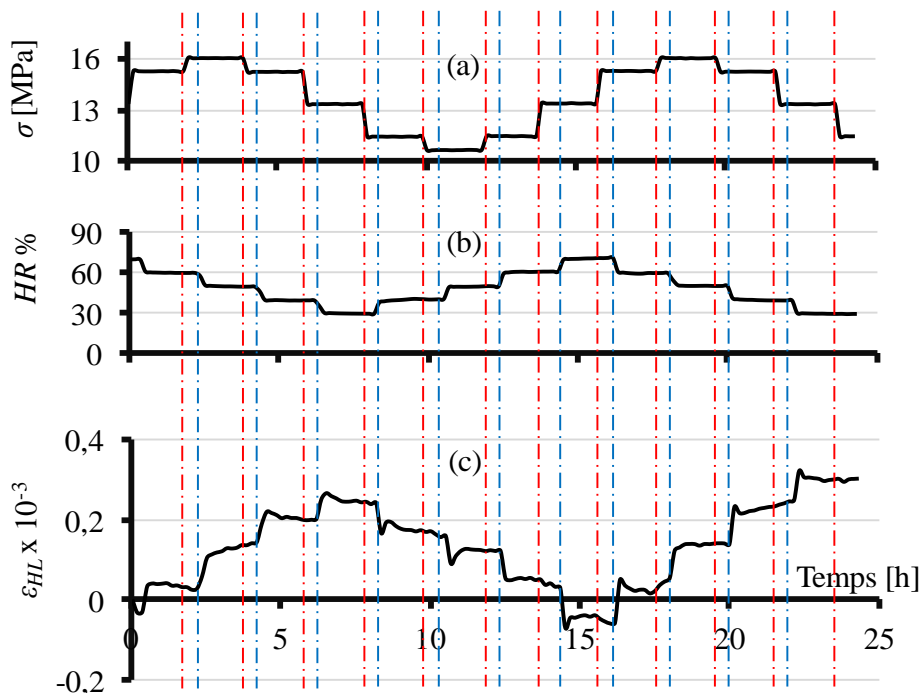


Figure 5-15 : Évolution de la déformation hygroverrou au cours de l'essai.

On remarque, que la déformation hygroverrou augmente lors du premier ½ cycle de séchage jusqu'à 30% d'humidité relative. Puis elle diminue dans le deuxième ½ cycle (phase d'humidification) jusqu'à s'annuler après 16h et 30 min lorsque l'humidité revient à son niveau initial (70%). Dans ce cycle,  $\varepsilon_{HL}$  atteint une valeur légèrement négative. Au dernier demi-cycle de séchage,  $\varepsilon_{HL}$  augmente de nouveau jusqu'à 30% d'humidité relative et atteint une valeur légèrement supérieure à celle du premier ½ cycle.

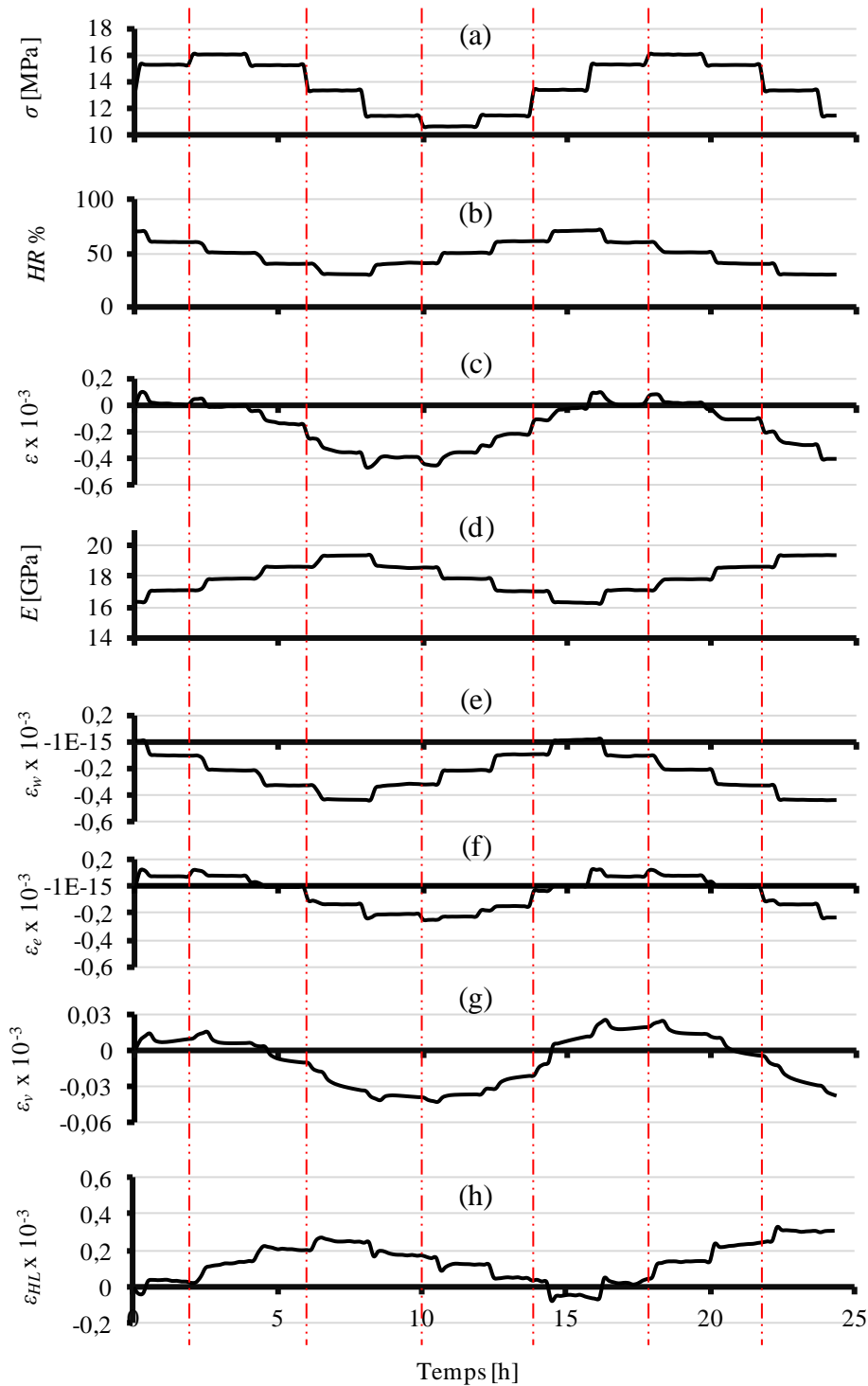


Figure 5-16 : Décomposition de la déformation totale mesurée durant l'essai mécanosorptif sous contrainte et humidité cycliques.

Ces observations sont duales aux essais mécanosorptifs de relaxation, Figure 5-8. En effet, on a une création de  $\varepsilon_{HL}$  en phase de séchage et une restitution progressive en phase d'humidification jusqu'à annulation lorsqu'on retrouve le taux d'humidité relative maximal sous chargement. D'autre part, en comparant la courbe de déformation hygroverrou (Figure 5-15 (c)) aux courbes de contrainte (Figure 5-15 (a)) et d'humidité relative (Figure 5-15 (b)), on constate que la variation de  $\varepsilon_{HL}$  ne dépend pas des variations de la contrainte  $\sigma$  mais uniquement de la variation de l'humidité relative  $HR$ . Toutes les courbes relatives à la partition de la déformation sont récapitulées sur la Figure 5-16.

### 5.3.3 Déformation hygroverrou pseudo-élastique

La variation de la déformation élastique peut se décomposer en une part due à la variation du module d'élasticité  $\Delta\varepsilon_e^{\Delta E}$  et une déformation due à la variation du chargement mécanique  $\Delta\varepsilon_e^{\Delta\sigma}$ , à savoir

$$\Delta\varepsilon_e = \Delta\varepsilon_e^{\Delta\sigma} + \Delta\varepsilon_e^{\Delta E} \quad \text{avec} \quad \Delta\varepsilon_e^{\Delta\sigma} = \frac{\Delta\sigma}{E(t+\Delta t)} \quad \text{et} \quad \Delta\varepsilon_e^{\Delta E} = \frac{\Delta E}{E(t+\Delta t)E} \sigma(t) \quad (5.24)$$

Comme  $\varepsilon_{HL}$  varie en fonction des seules variations de l'humidité relative, on peut la relier à la variation de la part élastique  $\Delta\varepsilon_e^{\Delta E}$  due à la variation du module d'élasticité lors d'une variation de l'humidité relative. On calcule ainsi  $\varepsilon_{HL}$  selon les cas suivants :

- En phase de séchage :

$$\Delta\varepsilon_{HL} = -\frac{\sigma(t)}{E(t+\Delta t)E} (E(t+\Delta t) - E(t)) \quad (5.25)$$

- En phase d'humidification :

$$\Delta\varepsilon_{HL} = -\frac{\sigma(t)}{E(t+\Delta t)E} (E(t+\Delta t) - \bar{E}(t)) \quad (5.26)$$

où  $\bar{E}(t)$  est la valeur du module d'élasticité qui correspond au maximum d'humidité relative atteint depuis le début de chargement.

La courbe de la déformation hygroverrou établie à partir des équations (5.25) et (5.26) est présentée à la Figure 5-17 (trait rouge) ; cette courbe présente la même allure que celle de la courbe hygroverrou expérimentale (trait noir), mais avec une différence d'amplitude.

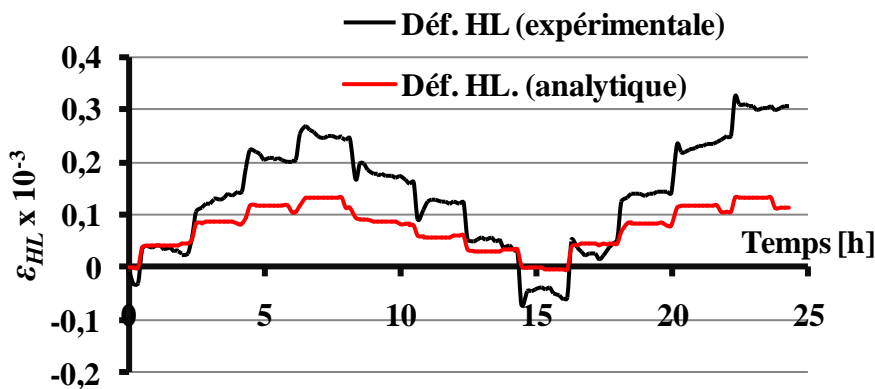


Figure 5-17 : Evolution de la déformation hygroverrou au cours du temps.

### 5.3.4 Reconstruction de l'évolution de la déformation totale

Sur la Figure 5-18, on compare l'évolution de la déformation totale mesurée au cours de l'essai, avec celle reconstruite en application de l'hypothèse de partition de la déformation, chaque composante étant calculée à l'aide des éléments de modèle présentés au §5.3.2 pour  $\varepsilon_w$ ,  $\varepsilon_e$  et  $\varepsilon_v$  et au §5.3.3 pour  $\varepsilon_{HL}$ . On remarque que la courbe issue du modèle trait discontinu est similaire à la courbe expérimentale (trait continu) avec une différence d'amplitude qui mérite d'être justifiée.

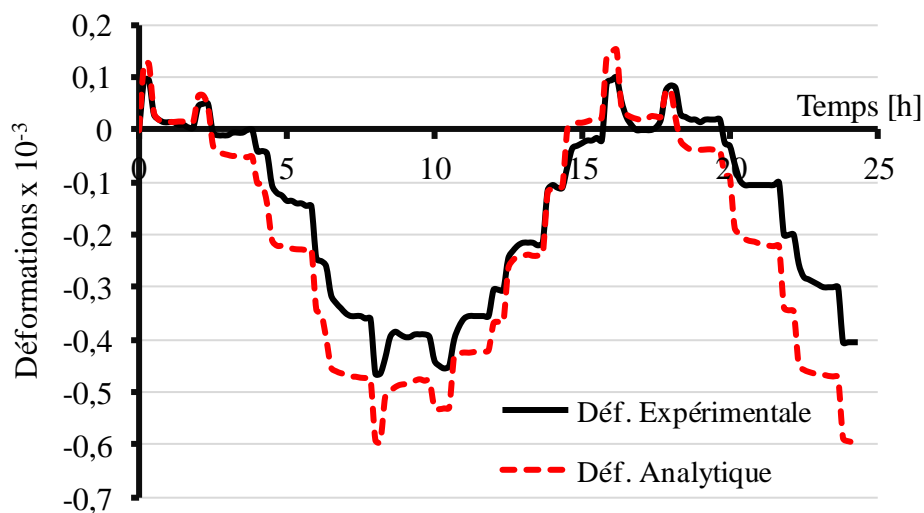


Figure 5-18 : Evolution de la déformation totale au cours de l'essai.

Pour toutes les analyses précédentes, on s'est placé implicitement dans l'hypothèse où toutes les variations de l'état hydrique de l'échantillon suivent la courbe de sorption. Cependant, ceci n'est sans doute pas toujours le cas. En effet, dans le cas d'un cycle partiel de variation de l'humidité relative, l'état hydrique de l'échantillon peut varier dans un intervalle limité suivant deux scénarios différents. Ces deux scénarios limites sont présentés sur la Figure 5-19 en trait rouge [SVE 11].

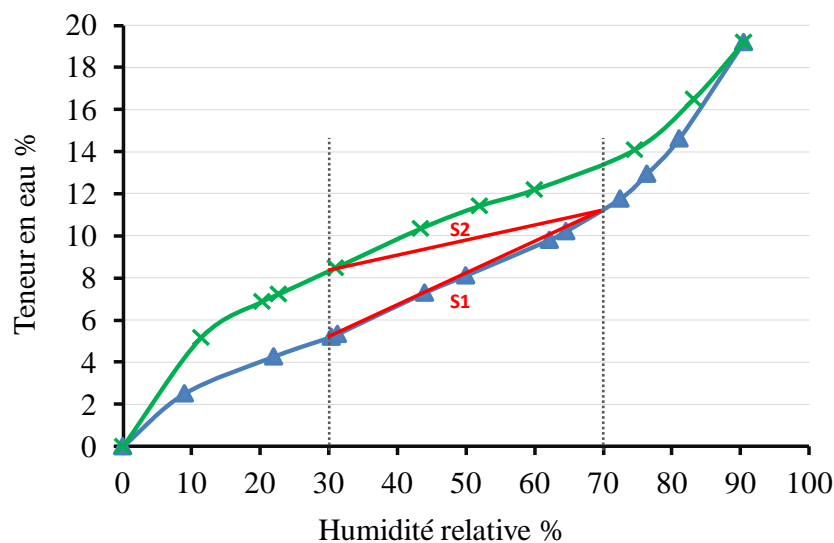


Figure 5-19 : Scénarios possibles pour l'évolution de l'état hydrique de l'échantillon au cours d'une variation de HR.

L'écart constaté sur la Figure 5-18 entre la déformation mesurée et la déformation simulée peut être totalement expliqué en considérant pour le coefficient de retrait hydrique une valeur égale à 0,009 (au lieu de 0,011 issue des essais préliminaires). Ceci est montré par la Figure 5-20, où la déformation totale simulée avec la valeur 0,009 est représentée pour chacun des deux scénarios S1 et S2. On remarque que les déformations calculées selon ces deux scénarios sont très proches et quasiment superposées à la courbe expérimentale.

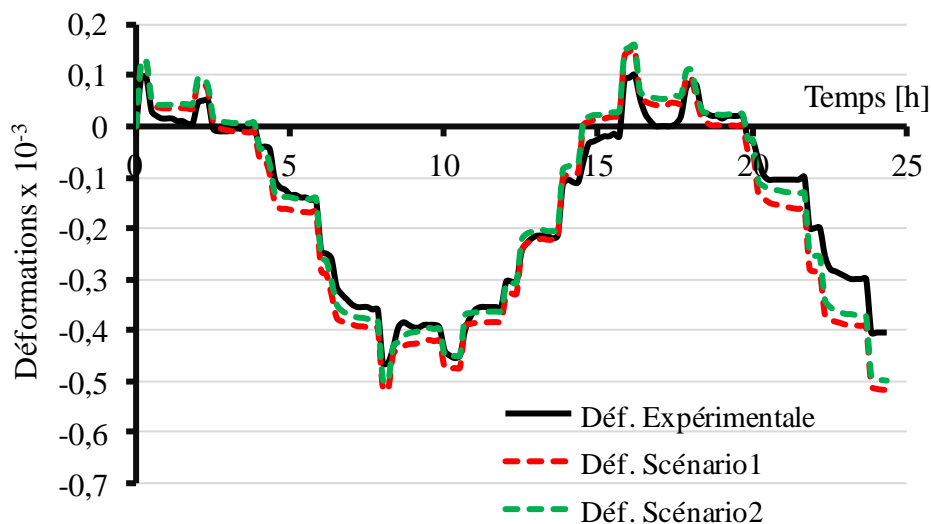


Figure 5-20 : Courbes de la déformation totale au cours du temps.

Cet écart dans la valeur du coefficient de retrait hydrique pourrait être justifié par les incertitudes sur les mesures. Une alternative à l'explication précédente serait que la différence observée entre déformation expérimentale et déformation calculée sur la Figure 5-18 corresponde à un effet de fluage mécanosorptif non pris en compte dans la modélisation et difficile à caractériser compte tenu du faible nombre de cycles (1,5). On peut en déduire que le résultat précédent valide le modèle proposé pour le calcul de la déformation hygroverrou sous chargement et humidité variables.

## 5.4 Conclusion

Des essais mécanosorptifs réalisés sur des échantillons de petites dimensions ont été présentés. En s'appuyant sur les résultats des essais de caractérisation hydrique et mécanique exploités dans le chapitre précédents, les essais mécanosorptifs ont pu être interprétés.

Des essais de relaxation-effacement sous deux cycles d'humidité relative variable différents ont été présentés. On constate que la comparaison avec les essais viscoélastiques à humidité relative constante montre l'existence d'un effet mécanosorptif. La partition de la contrainte totale en une partie hydrique et une partie viscoélastique à humidité variable permet de déduire la contrainte hygroverrou pour les deux cycles. Après analyse de cette contrainte, un modèle est proposé et validé par comparaison aux résultats expérimentaux.

Ensuite, on a montré qu'un essai en fluage sous sollicitation et humidité relative variables de façon cyclique confirme la différence du comportement du bois sous contrainte lors du séchage et de l'humidification. La courbe contrainte-déformation montre l'effet couplé des déformations de fluage et mécanosorptive. L'analyse du résultat d'essai sur la base de l'hypothèse de partition de la déformation a permis d'isoler la déformation hygroverrou. Un modèle dual à celui déjà présenté en relaxation est finalement validé par comparaison au modèle expérimental.

## **PARTIR III. ÉTUDE ANALYTIQUE**

**Chapitre 6. Modélisation analytique**

**Chapitre 7. Validation numérique**





## Chapitre 6. MODELISATION ANALYTIQUE

Ce chapitre est dédié à la construction d'un modèle numérique incrémental de comportement pour le Sapin Blanc. Ce modèle sera en particulier utile pour l'interprétation des résultats d'essais présentés dans la partie précédente. Divers modèles rhéologiques ont été examinés au chapitre 1, §1.2.3.1 pour représenter le comportement mécanosorptif du bois. Dans ce qui suit on propose plusieurs modèles rhéologiques basés sur l'hypothèse de partition en contrainte ou en déformation pour construire une formulation incrémentale de la loi de comportement du bois sous chargement mécanique et humidité variables [SAI 13b].

Dans un premier temps, un modèle pseudo élastique, basé sur la loi de Hooke (en humidification) ou de Hooke restreint (en séchage), est formulé en rigidité et en complaisance. Des exemples illustratifs permettent de montrer l'équivalence des deux formulations. Par la suite, ce modèle est couplé à un amortisseur afin de prendre en compte le comportement viscoélastique, ce qui conduit à une équation intégrale. Une approche par discrétisation numérique permet la mise en œuvre de cette équation. Dans un deuxième temps, un modèle mécanosorptif viscoélastique couplé est proposé. Ce modèle est basé sur une intégrale de Boltzmann à paramètres constants (en séchage) et variables (en humidification). Une équation de Boltzmann à paramètres variables est ensuite proposée et mise sous une forme incrémentale. Le rapprochement de ces deux formulations incrémentales en humidification et en séchage conduit à une loi de comportement viscoélastique mécanosorptive. Enfin, les deux approches sont validées par comparaison aux essais expérimentaux.

### 6.1 Modèles à effet hygroverrou « pseudo-élastique »

Des modèles rhéologiques sont nécessaires pour modéliser le comportement du bois sous chargement et humidité variables. Ces modèles se classent en fonction du principe de partition de la déformation ou de la contrainte utilisé et de leur couplage. Dans ce qui suit, on considère que l'effet hygroverrou ne dépend que de la variation de la déformation élastique due à la variation de la teneur en eau.

#### 6.1.1 Cadre général

##### 6.1.1.1 Comportement hydromécanique du bois

Les résultats de la partie expérimentale ont mis en évidence que, lorsque le bois est exposé à une humidité relative constante ou croissante, son comportement dépend des variations du chargement mécanique et de l'humidité. Dans ce cas, si l'on fait abstraction de la déformation hydrique et des effets viscoélastiques, la relation entre la contrainte totale  $\sigma$  et la déformation  $\varepsilon$  est régie par la loi de Hooke :

$$\forall \dot{w} \geq 0 : \sigma = E(w) \cdot \varepsilon \Leftrightarrow \dot{\sigma} = E(w) \cdot \dot{\varepsilon} + \dot{E}(w) \cdot \varepsilon \quad \text{où} \quad \dot{E}(w) = E'(w) \dot{w} \quad (6.1)$$

Par contre, lorsque le bois est soumis à un séchage sous chargement constant ou variable, son comportement dépend uniquement du chargement mécanique. Par conséquent, la réponse obéit à la loi de Hooke restreinte [BAZ 79] :

$$\forall \dot{w} < 0 : \dot{\sigma} = E(w) \dot{\varepsilon} \quad (6.2)$$

Dans ces deux expressions  $E(w)$  est le module d'élasticité courant fonction de la teneur en eau  $w$ . Les équations (6.1) et (6.2), peuvent être rassemblées sous la forme générale suivante :

$$\dot{\sigma} = E(w) \dot{\varepsilon} - \langle -\dot{E}(w) \rangle \varepsilon \Rightarrow \dot{\sigma} = E(w) \dot{\varepsilon} + \langle \dot{w} \rangle E'(w) \varepsilon \quad (6.3)$$

Dans cette expression,  $\langle \cdot \rangle$  est la partie positive de  $\cdot$ .

La complexité de la formulation analytique d'un problème mécanosorptif réside dans le développement d'une expression générale qui intègre l'effet de l'histoire des variations hydriques sous chargement mécanique quelconque. Il est donc nécessaire d'explicitier l'équation (6.3) en prenant en compte tous les cas possibles de chargement et de variation de la teneur en eau.

### 6.1.1.2 Cadre thermodynamique

Le cadre thermodynamique permet d'identifier les variables pertinentes à considérer pour la formulation d'une loi de comportement et de décrire les relations qui les lient au travers des lois d'état et des lois complémentaires. Par analogie avec le comportement thermoélastique, les variables d'état à considérer pour construire une loi hydromécanique isotherme sont la déformation  $\varepsilon$  et la teneur en eau  $w$ . Pour décrire l'effet hygroverrou, il est utile d'introduire une variable complémentaire  $\varepsilon_{HL}$  qui sera traitée par la suite comme une partition de la déformation totale. Ces variables d'état sont prises en compte dans l'expression de l'énergie libre spécifique ou potentiel thermodynamique  $\psi(\varepsilon, w, \varepsilon_{HL})$ .

Pour la suite, et compte tenu des observations expérimentales rapportées dans la partie 2, on admet que l'effet hygroverrou se manifeste quelque soit l'état hydromécanique et réciproquement. Ceci permet de scinder le potentiel thermodynamique comme suit :

$$\psi(\varepsilon, w, \varepsilon_{HL}) = \psi_{e,w}(\varepsilon, w) + \psi_{HL}(\varepsilon_{HL}) \quad (6.4)$$

$\psi_{e,w}$  et  $\psi_{HL}$  étant respectivement les potentiels hydroélastique et hygroverrou. L'introduction de variables associées aux variables d'état par l'intermédiaire des lois d'état conduit à l'expression d'un ensemble de fonctions qui constituent la loi de comportement [LEM 01]. Ainsi, on associe la contrainte  $\sigma$  à la déformation totale  $\varepsilon$  par la première loi d'état, comme suit :

$$\sigma = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon} \Rightarrow \sigma = \rho \frac{\partial \psi_{e,w}(\varepsilon, w)}{\partial \varepsilon} = f_1(\varepsilon, w) \quad (6.5)$$

Par analogie avec la thermoélasticité, le choix pour  $\psi_{e,w}$  d'une forme quadratique de  $\varepsilon$  et  $w$  conduit à une relation linéaire entre  $\sigma$  d'une part,  $\varepsilon$  et  $w$  d'autre part :

$$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_w \quad (6.6)$$

où  $\varepsilon_e = \frac{\sigma}{E(w)}$  correspond au comportement élastique linéaire classique et  $\varepsilon_w = \alpha \Delta w$  correspond à la déformation hydrique (retrait/gonflement). D'où :

$$\sigma = E(w)(\varepsilon - \alpha \Delta w) \quad (6.7)$$

De même, l'aspect hygroverrou du comportement hydromécanique peut être formalisé en introduisant une variable  $\sigma_{HL}$  associée à la variable d'état  $\varepsilon_{HL}$ . La troisième loi d'état fournit une base pour la relation entre ces deux variables :

$$\sigma_{HL} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon_{HL}} \Rightarrow \sigma_{HL} = \rho \frac{d\psi_{HL}}{d\varepsilon_{HL}} = f_2(\varepsilon_{HL}) \quad (6.8)$$

On voit que le cadre thermodynamique ainsi exprimé prévoit l'existence d'une relation bi-univoque entre la déformation hygroverrou  $\varepsilon_{HL}$  et sa variable associée  $\sigma_{HL}$ . Pour la suite, on admet de représenter cette relation par une forme linéaire telle que :

$$\sigma_{HL} = E(w)\varepsilon_{HL} \quad (6.9)$$

Il est à noter que  $\sigma_{HL}$  n'a pas ici de réelle signification physique. Elle servira uniquement de support pour la quantification de l'effet hygroverrou dans la modélisation numérique.

Dans un second temps (§6.2), cette approche devra être complétée pour rendre compte des effets viscoélastiques. Rappelons ici que, dans le contexte général de la théorie viscoélastique linéaire, il n'est pas nécessaire d'introduire de variable complémentaire spécifique pour décrire ce comportement. Moyennant l'hypothèse que la contrainte puisse s'écrire comme la somme d'une partie réversible  $\sigma_e$  liée à la déformation par la première loi d'état et d'une partie visqueuse  $\sigma_v$  liée à la vitesse de déformation par la première loi complémentaire (voir §2.1.3), on obtient une équation différentielle du premier ordre de la déformation viscoélastique dont la résolution pour une contrainte constante fournit l'expression de la fonction de fluage [LEM 01].

Ces principes généraux sont mis en œuvre dans les développements qui suivent, moyennant l'hypothèse de partition de la contrainte dans l'approche en rigidité (§6.1.2), ou de la déformation dans l'approche en complaisance (§6.1.3).

### 6.1.2 Approche en rigidité

Cette approche est basée sur le principe de partition de la contrainte. Dans l'hypothèse d'un comportement pseudo-élastique, ce principe s'écrit

$$\sigma = \sigma_e + \sigma_{HL} + \sigma_w \quad \forall t \quad (6.10)$$

$\sigma_e$  et  $\sigma_w$  sont les contraintes élastique et hydrique. On suppose que la contrainte  $\sigma_w$  ne dépend que de l'état hydrique du bois ; elle peut donc être traitée séparément comme une contrainte libre imposée (analogue à une contrainte thermique). Dans ce qui suit, pour des raisons de clarté, on fait abstraction de  $\sigma_w$ . Ainsi, l'équation (6.10) devient

$$\sigma = \sigma_e + \sigma_{HL} \quad \text{avec} \quad \sigma_e = E(w)\varepsilon \quad \forall t \quad (6.11)$$

En prenant en considération l'effet seuil et l'effet mémoire de la teneur en eau, l'illustration du comportement introduit par les équations (6.1) et (6.2) est présentée à la Figure 6-1 pour une déformation et une teneur en eau imposées.

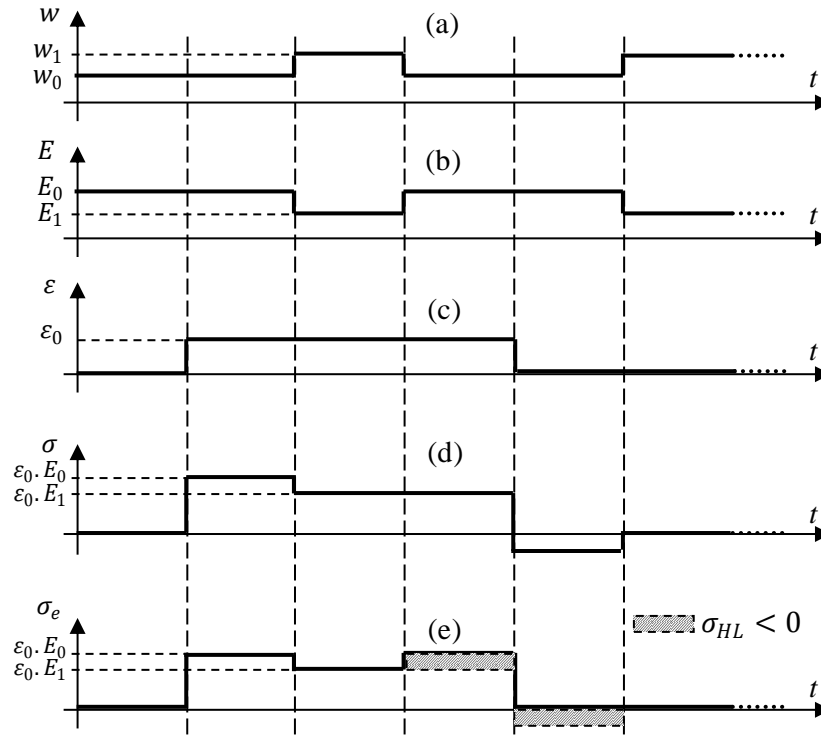


Figure 6-1 : Illustration du comportement sous déformation imposée et teneur en eau variables.

La contrainte totale (Figure 6-1 (d)) est égale à la contrainte élastique tant que l'humidité est constante ou croissante. Par contre, cette contrainte se bloque lorsque la variation de teneur en eau devient négative. La comparaison entre  $\sigma$  (Figure 6-1(d)) et  $\sigma_e$  calculée par la loi de Hooke (Figure 6-1 (e)) montre l'apparition de la contrainte hygroverrou  $\sigma_{HL} < 0$  qui vient s'ajouter à  $\sigma_e$  pour atteindre  $\sigma$ . Cette contrainte hygroverrou  $\sigma_{HL}$  est représentée par l'aire hachurée dans la Figure 6.1 (e). On observe que  $\sigma_{HL}$  persiste après déchargement, Elle s'annule lorsque la teneur en eau revient finalement à sa valeur maximale atteinte au début de la phase de séchage sous contrainte.

### 6.1.2.1 Déformation constante en séchage

Dans le cas d'un séchage sous déformation constante  $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 = \text{cte}$ , en considérant les équations (6.2) et (6.11), on a :

$$\dot{\sigma}_{HL} = -\dot{\sigma}_e \quad (6.12)$$

En tenant compte de l'équation (6.1) et de l'équation (6.9), on déduit les expressions suivantes

$$\dot{\sigma}_e(t) = \dot{E}(t)\varepsilon_0 \text{ et } \dot{\sigma}_{HL}(t) = E(t)\dot{\varepsilon}_{HL} + \dot{E}(t)\varepsilon_{HL} \quad (6.13)$$

En combinant les équations (6.12) et (6.13), on obtient après résolution de l'équation différentielle, la forme générale de la déformation hygroverrou

$$\varepsilon_{HL}(t) = \frac{E(t_0)}{E(t)} \left[ \varepsilon_{HL}(t_0) - \int_{t_0}^t \frac{\dot{E}(\tau)}{E(t_0)} \varepsilon_0 d\tau \right] \quad (6.14)$$

On suppose qu'à l'instant  $t_0$  du début du chargement,  $\varepsilon_{HL}(t_0) = 0$ . D'où il vient :

$$\varepsilon_{HL}(t) = \left( \frac{\bar{E}(t) - E(t)}{E(t)} \right) \varepsilon_0 \quad (6.15)$$

où  $\bar{E}(t) = E(t_0)$  est la valeur du module d'élasticité au début de la phase de séchage sous déformation imposée non nulle. On en déduit l'expression de la contrainte hygroverrou en phase de séchage sous déformation constante :

$$\sigma_{HL}(t) = (\bar{E}(t) - E(t))\varepsilon_0 \quad (6.16)$$

Finalement, la contrainte totale prend l'expression suivante :

$$\sigma(t) = \sigma_e(t) + \sigma_{HL}(t) \quad (6.17)$$

Soit, compte tenu des équations 6.6 et 6.16 :

$$\sigma(t) = \bar{E}(t) \cdot \varepsilon_0 \quad (6.18)$$

Ce résultat correspond au fait que sur la figure 6.1 (d), la contrainte  $\sigma$  n'est pas modifiée par la phase de séchage.

### 6.1.2.2 Chargement constant pour une teneur en eau variable

On analyse maintenant la réponse du matériau pour une déformation imposée constante  $\varepsilon_0$  (Figure 6-2(a)) et une évolution quelconque de la teneur en eau (Figure 6-2 (b)).

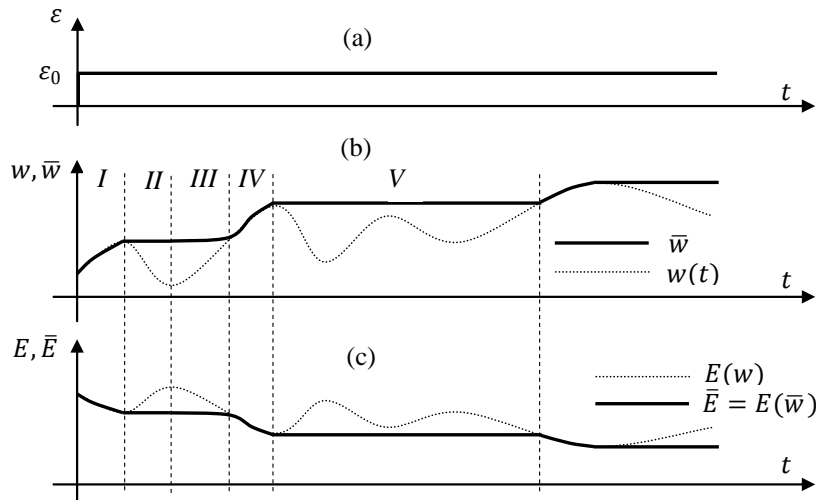


Figure 6-2 : Illustration du minimum de rigidité.

On observe quatre phases différentes (*I*, *II*, *III* et *IV*) correspondant à l'évolution de  $w$ . Durant la phase initiale d'humidification *I*,  $w$  augmente. Si on suppose le matériau intact ( $\varepsilon_{HL} = 0$ ), le comportement obéit à la loi de Hooke (6.1). Au cours de la phase de séchage *II*,  $w$  diminue. En application de ce qui a été vu précédemment, le comportement suit la loi suivante

$$\sigma = \bar{E} \cdot \varepsilon_0 \text{ avec } \bar{E} = E(\bar{w}) \quad (6.19)$$

où  $\bar{E} = E(\bar{w})$  est le module d'élasticité au début de la phase de séchage sous déformation imposée (Figure 6-2 (c)). Dans la phase *III*,  $w$  augmente. Cependant tant que  $w < \bar{w}$  (teneur en eau au début de la phase de séchage) la contrainte  $\sigma$  reste constante (donnée par l'équation 6.19). Dans la phase *IV*,  $w$  dépasse  $\bar{w}$  ; le comportement est le même qu'en phase *I*. Dans la phase *V*, un nouveau cycle de séchage/humidification est imposé et l'analyse est similaire aux phases *II* et *III*,  $\bar{w}$  étant cette fois l'humidité au début de la nouvelle phase de séchage. On note que dans les phases *I* et *IV*,  $E$  et  $\bar{E}$  sont

confondus. Ceci nous permet de généraliser l'expression de la contrainte totale pour des cycles d'humidification/séchage quelconques. Au final, en utilisant la partition de la contrainte, on déduit l'expression de la contrainte hygroverrou suivante

$$\sigma_{HL} = (\bar{E} - E)\varepsilon_0 \quad (6.20)$$

Dans cette expression,  $\bar{E}$  représente donc la valeur du module d'élasticité pour la teneur en eau maximale atteinte à l'instant  $t$  depuis le début de chargement.

### 6.1.2.3 Chargement et teneur en eau variables

Dans le cas d'une déformation imposée variable, on utilise le principe de discrétisation de la déformation sur des intervalles de temps finis  $[t_i, t_i + \Delta t]$  (Figure 6-3) :

$$\varepsilon = \sum_i \Delta\varepsilon_i \text{ et } \Delta\varepsilon_i = \varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i \quad (6.21)$$

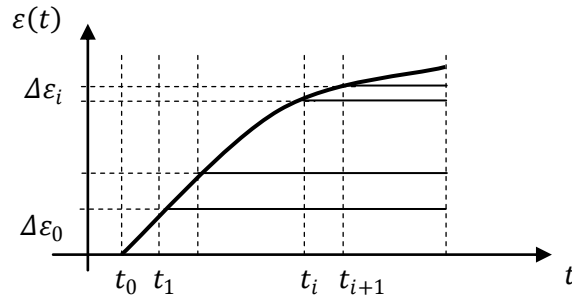


Figure 6-3. Discretisation de la déformation imposée.

La contrainte totale  $\sigma$  est à tout instant  $t_i$  la somme des réponses élémentaires  $\Delta\sigma_i$  aux paliers de déformation  $\Delta\varepsilon_i$  sur l'intervalle  $[t_0, t_i]$  soit

$$\sigma = \sum_i \Delta\sigma_i \quad (6.22)$$

équation dans laquelle l'incrément de contrainte s'écrit

$$\Delta\sigma_i = \bar{E}_i \Delta\varepsilon_i \quad (6.23)$$

$\bar{E}_i$  est le module d'élasticité correspondant à  $\bar{w}_i$  qui représente la teneur en eau maximale à l'instant  $t_i$ . L'équation de partition de la contrainte s'écrit sur l'incrément de temps  $[t_i, t_i + \Delta t]$  :

$$\Delta\sigma_i = \Delta\sigma_{HL,i} + \Delta\sigma_{e,i} \quad (6.24)$$

Selon l'équation (6.23), l'incrément de la contrainte hygroverrou s'écrit finalement :

$$\Delta\sigma_{HL,i} = \Delta\sigma_i - \Delta\sigma_{e,i} = (\bar{E}_i - E)\Delta\varepsilon_i \quad \forall t \geq t_i \quad (6.25)$$

On applique les relations précédentes au cas de deux incréments de déformation sous teneur en eau variable. La Figure 6-4 montre les variations de  $\bar{w}_i$  et  $\bar{E}_i$  correspondant à ces deux incréments de déformation  $\Delta\varepsilon_i (i = 1, 2)$ .

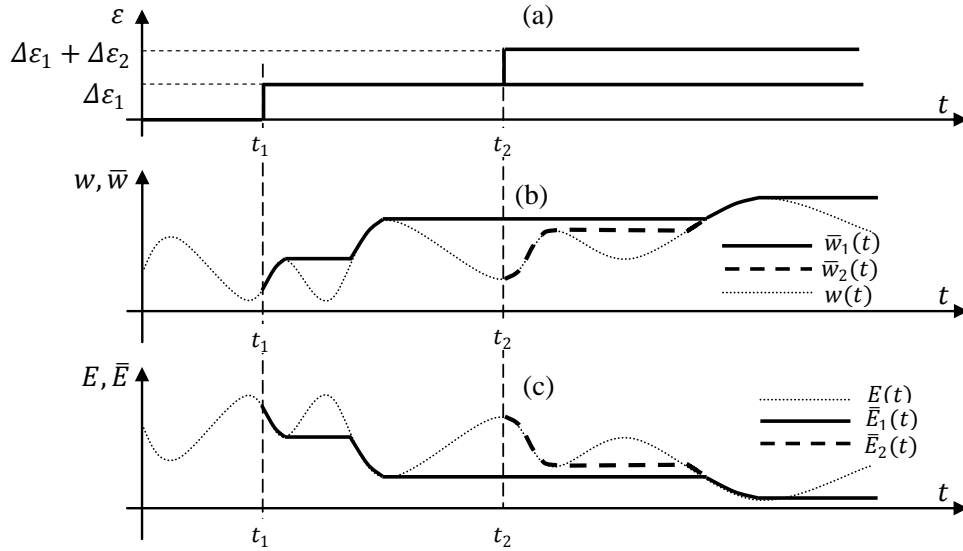


Figure 6-4. Illustration de la rigidité minimale pour deux paliers de déformation imposée.

En appliquant les relations précédentes, les valeurs prises par la contrainte  $\sigma$  et la contrainte hygroverrou  $\sigma_{HL}$  s'écrivent :

$$\begin{aligned}
 t < t_1 &\Rightarrow \sigma = 0 \text{ et } \sigma_{HL}(t) = 0 \\
 t \in [t_1, t_2[ &\Rightarrow \sigma = \bar{E}_1 \cdot \Delta \varepsilon_1 \text{ et } \sigma_{HL} = (\bar{E} - E) \varepsilon_1 \\
 t \geq t_2 &\Rightarrow \sigma = \bar{E}_1 \cdot \Delta \varepsilon_1 + \bar{E}_2 \cdot \Delta \varepsilon_2 \text{ et } \sigma_{HL} = (\bar{E}_1 - E) \varepsilon_1 + (\bar{E}_2 - E) \varepsilon_2
 \end{aligned} \tag{6.26}$$

Dans l'équation (6.26), on a  $\sigma_{HL} = \Delta \sigma_{HL,1} + \Delta \sigma_{HL,2}$ , où  $\Delta \sigma_{HL,1}$  et  $\Delta \sigma_{HL,2}$  représentent les incréments de contrainte hygroverrou induits respectivement par les incréments de déformation  $\Delta \varepsilon_1$  et  $\Delta \varepsilon_2$ . Ces expressions traduisent ainsi la linéarité de la déformation hygroverrou. La généralisation de l'expression (6.26), pour  $N$  paliers de déformation imposée, conduit à :

$$\sigma_{HL}(t) = \sum_{i=0}^N H(t - t_i) (\bar{E}_i - E) \Delta \varepsilon_i \tag{6.27}$$

avec  $H(t - t_i)$  la fonction d'Heaviside. Enfin, la contrainte totale prend l'expression suivante :

$$\sigma(t) = \sum_{i=0}^N H(t - t_i) \bar{E}_i \Delta \varepsilon_i \tag{6.28}$$

Ceci peut être généralisé, dans le cas d'une déformation continument variable, par la forme intégrale suivante :

$$\sigma(t) = \int_{t_0}^t \bar{E}(t, \tau) \dot{\varepsilon}(\tau) d\tau \tag{6.29}$$

Finalement, afin de représenter le comportement pseudo élastique hygroverrou décrit par les équations (6.28) et (6.29), on propose le modèle analogique de la Figure 6-5. Ce modèle se compose d'un ressort hygroverrou associé en parallèle à un ressort élastique.



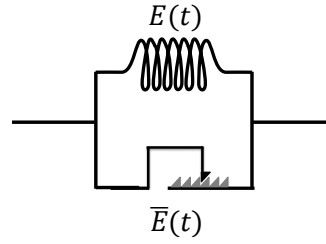


Figure 6-5 : Modèle hygroverrou couplé avec ressort élastique en parallèle.

### 6.1.3 Approche en complaisance

Cette approche a été initialement développée par Husson [HUS 09] [HUS 10] en se basant sur le principe de partition de la déformation. Elle est résumée ici dans le cas pseudo-élastique

$$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_{HL} + \varepsilon_w \quad \forall t \quad (6.30)$$

Pour des raisons analogues à celles exposées au paragraphe 6.1.2, la déformation totale est cette fois décomposée de la manière suivante

$$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_{HL} \quad \text{avec} \quad \varepsilon_e = \frac{\sigma}{E(w)} \quad \forall t \quad (6.31)$$

En prenant en considération l'effet seuil et l'effet mémoire de la teneur en eau, la loi de comportement introduite par les équations (6.1) et (6.2) est illustrée sur la Figure 6-6 [HUS 10].

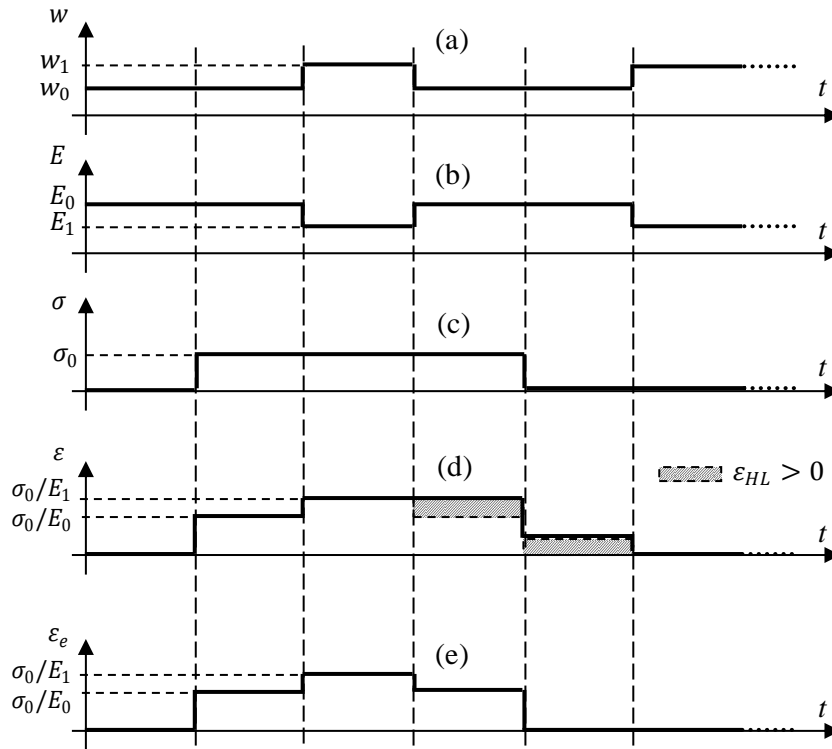


Figure 6-6 : Illustration de l'effet hygroverrou sous chargement et teneur en eau variables [HUS 10].

De manière similaire à la Figure 6-1, les Figure 6-6 ((a), (b), (c), (d) et (e)) présentent respectivement l'évolution de  $w$ ,  $E$ ,  $\sigma$ ,  $\varepsilon$  et  $\varepsilon_e$ . On tire les mêmes remarques et les mêmes conclusions que dans le cas de l'approche en rigidité.

### 6.1.3.1 Chargement constant et teneur en eau variable

À partir des travaux de Husson [HUS 10], et en se référant aux développements des § 6.1.2.1 et § 6.1.2.2, on obtient les déformations hygroverrou et totale en phase de séchage sous contrainte constante et teneur en eau variable.

$$\varepsilon_{HL} = \left( \frac{E - \bar{E}}{\bar{E}} \right) \cdot \frac{\sigma_0}{E} \quad \text{et} \quad \varepsilon = \frac{\sigma_0}{E_0} \quad (6.32)$$

Aussi, on généralise l'expression (6.32) dans le cas d'une variation de teneur en eau quelconque, Figure 6-7 [HUS10].

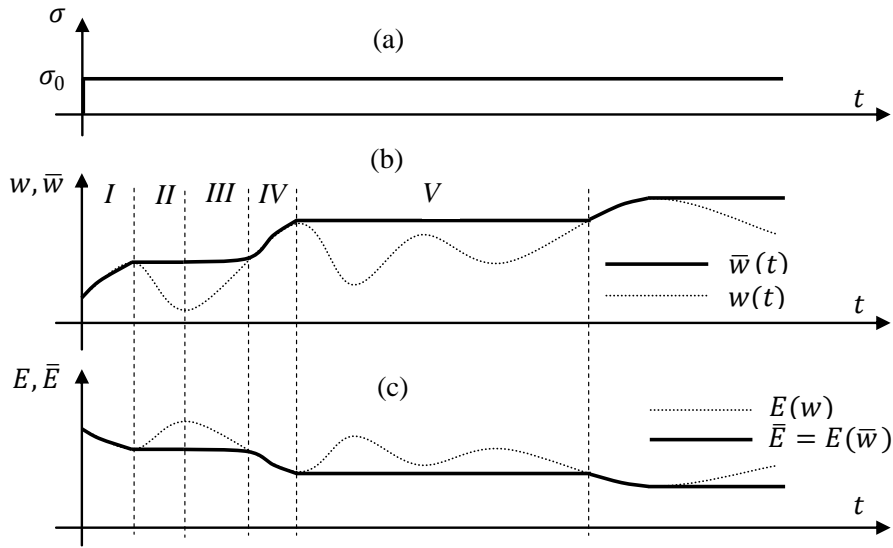


Figure 6-7. Illustration du module d'élasticité minimum sous chargement constant.

### 6.1.3.2 Chargement et teneur en eau variables

De manière similaire au § 6.1.2.3, pour une contrainte variable on utilise le principe de discrétisation de la contrainte sur des intervalles de temps finis  $[t_i, t_i + \Delta t]$ , (Figure 6-8) :

$$\sigma = \sum_i \Delta\sigma_i \quad \text{avec} \quad \Delta\sigma_i = \sigma_{i+1} - \sigma_i \quad (6.33)$$

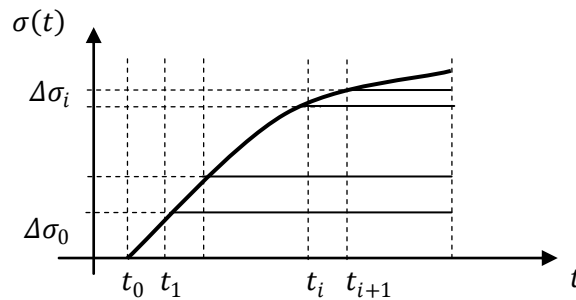


Figure 6-8. Discrétisation de la contrainte

L'incrément de la déformation hygroverrou s'écrit alors

$$\Delta\varepsilon_{HL,i} = \left( \frac{E(t) - \bar{E}_i(t)}{\bar{E}_i(t)} \right) \frac{\Delta\sigma_i}{E(t)} \quad \forall t \geq t_i \quad (6.34)$$

avec  $\bar{E}_i$  le module d'élasticité correspondant à  $\bar{w}_i$  qui représente la teneur en eau maximale à l'instant  $t_i$ . La généralisation de l'expression (6.34) pour  $N$  paliers de contraintes entraîne

$$\varepsilon_{HL}(t) = \sum_{i=0}^N H(t - t_i) \left( \frac{E(t) - \bar{E}_i(t)}{E(t) \cdot \bar{E}_i(t)} \right) \Delta \sigma_i \quad \forall t \quad (6.35)$$

Il en résulte que la déformation totale prend l'expression suivante :

$$\varepsilon(t) = \sum_{i=0}^N H(t - t_i) \frac{\Delta \sigma_i}{\bar{E}_i(t)} \quad (6.36)$$

Ce qui peut être généralisé par la forme intégrale suivante, dans le cas d'une contrainte continument variable

$$\varepsilon(t) = \int_{t_0}^t \frac{1}{\bar{E}(t, \tau)} \dot{\sigma}(\tau) d\tau \quad (6.37)$$

Afin de représenter le comportement pseudo élastique hygroverrou introduit par les équations (6.36) ou (6.37), on propose le modèle rhéologique de la Figure 6-9. Ce modèle se compose d'un ressort hygroverrou associé en série à un ressort élastique.

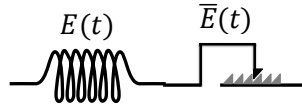


Figure 6-9 : Modèle hygroverrou couplé avec un ressort élastique en série.

## 6.2 Couplage viscoélastique-hygroverrou

Comme rappelé au chapitre précédent, des modèles rhéologiques sont souvent utiles pour la représentation des comportements mécaniques associés. La prise en considération des effets différés dans des modèles rhéologiques nécessite la mise en place d'un ou plusieurs pistons. Basé sur le modèle du ressort hygroverrou développé aux paragraphes § 6.1.2 et § 6.1.3, plusieurs modèles rhéologiques représentatifs du comportement viscoélastique hygroverrou sont proposés dans ce qui suit.

### 6.2.1 Cadre général

Afin de modéliser le comportement du bois sous chargement et humidité variables, plusieurs modèles rhéologiques représentatifs peuvent être envisagés. Ces modèles se classent en fonction des principes de partition et de couplage de la déformation ou de la contrainte. Ainsi, on propose trois familles de modèles, à savoir :

- Modèles à effet hygroverrou découplé, dans lequel l'effet hygroverrou est totalement découplé des autres effets ;
- Modèles à effet hygroverrou partiellement couplé, dans lequel l'effet hygroverrou est couplé avec l'effet élastique ;
- Modèles à effet hygroverrou couplé, dans lequel l'effet hygroverrou est couplé à l'effet viscoélastique.

Les trois modèles sont détaillés respectivement dans les paragraphes §6.2.2, §6.2.3 et §6.2.4.

### 6.2.2 Modèles à effet hygroverrou découplé

Dans ces modèles l'effet hygroverrou est considéré comme une déformation libre, indépendante des autres effets mécaniques et hydriques. On suppose aussi que la déformation élastique est couplée à la déformation visqueuse. Dans cette hypothèse, le principe de partition de la déformation devient

$$\varepsilon = \varepsilon_w + \varepsilon_{ve} + \varepsilon_{HL} \quad (6.38)$$

La déformation viscoélastique ( $\varepsilon_{ve}$ ) peut être modélisée par le modèle rhéologique de Maxwell ou de Kelvin selon le cas. En fonction du modèle viscoélastique choisi, deux modèles représentatifs sont proposés dans la Figure 6-10.

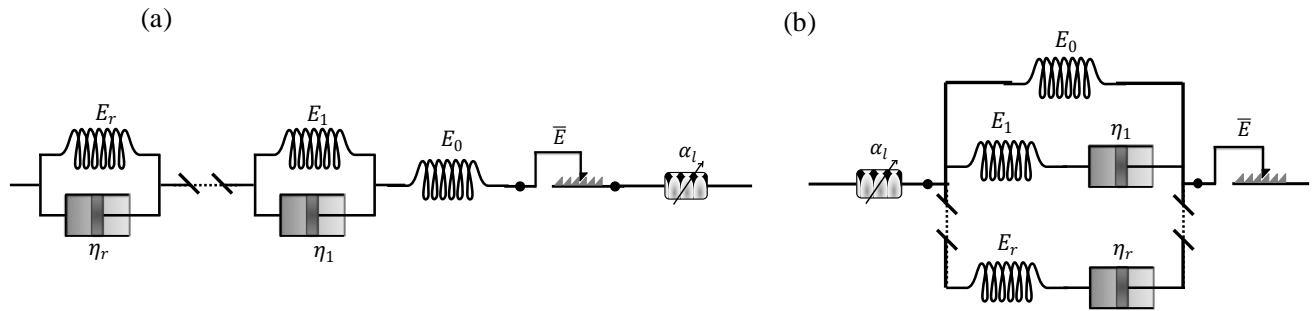


Figure 6-10 : Modèle de Kelvin généralisé couplé avec ressort hygroverrou et élément hydrique (a) ; Modèle de Maxwell généralisé couplé avec ressort hygroverrou et élément hydrique (b).

Les Figure 6-10 (a) et (b) associent en série respectivement le modèle rhéologique viscoélastique de Kelvin généralisé et le modèle de Maxwell généralisé avec un ressort hygroverrou et un élément hydrique. Ces modèles sont très simples en termes de formulation analytique, le couplage hygroverrou se produisant indépendamment de la déformation viscoélastique.

### 6.2.3 Modèles à effet hygroverrou partiellement couplé

Dans ces modèles, on considère que la déformation ou que la contrainte hygroverrou est couplée à la déformation ou à la contrainte élastique. On note  $\varepsilon_{e,HL}$  la déformation élastique hygroverrou et  $\sigma_{e,HL}$  la contrainte élastique hygroverrou représentées par  $\varepsilon$  et  $\sigma$  dans les §6.1.2 et §6.1.3. On couple ces effets avec un piston pour introduire la viscoélasticité.

En faisant abstraction des effets de déformation ou de contrainte hydrique, on définit quatre modèles élémentaires représentatifs du comportement mécanosorptif viscoélastique (Figure 6-11 et Figure 6-12), basés sur les équations de partition de la contrainte ou de la déformation.

$$\sigma(t) = \sigma_v(t) + \sigma_{e,HL}(t) \text{ et } \varepsilon(t) = \varepsilon_v(t) + \varepsilon_{e,HL}(t) \quad (6.39)$$

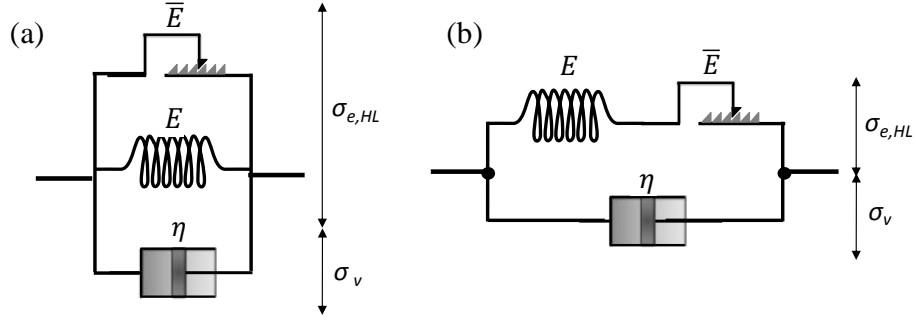


Figure 6-11 : Modèles rhéologiques mécanosorptifs basés sur l'hypothèse de partition de la contrainte.

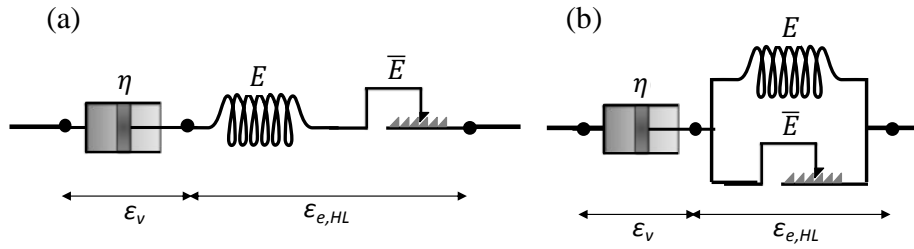


Figure 6-12 : Modèles rhéologiques mécanosorptifs basés sur l'hypothèse de partition de la déformation.

Les Figure 6-11 (a) et (b) associent respectivement en parallèle le modèle élastique hygroverrou et le piston. De même, les figures 6.11 (a) et (b) présentent le modèle élastique hygroverrou en série avec le piston. Comme précédemment, l'association de ces modèles en série et en parallèle est conforme aux hypothèses de partition de la contrainte ou de la déformation (6.39).

### 6.2.3.1 Construction d'une loi de comportement

Dans ce paragraphe on détermine la loi de comportement du modèle présenté à la Figure 6-12 (a). Ce choix se justifie par le fait que ce modèle sera utilisé ultérieurement pour justifier la construction d'un modèle généralisé pour le comportement viscoélastique mécanosorptif. Dans ce modèle élémentaire, l'évolution de la déformation visqueuse (piston) pour une histoire de sollicitation quelconque est obtenue par une intégration de la loi de Newton comme suit

$$\varepsilon_v(t) = \int_{t_0}^t \frac{1}{\eta(\tau)} \sigma(\tau) d\tau \quad (6.40)$$

avec  $\eta(\tau)$  le coefficient de viscosité à l'instant  $\tau$ . En substituant les équations (6.37) et (6.40) dans la seconde des deux équations (6.39) et en utilisant l'intégrale de Stieltjes pour exprimer la déformation  $\varepsilon$ , on obtient

$$\varepsilon(t) = \int_{t_0}^t \dot{\varepsilon}(\tau) d\tau = \int_{t_0}^t \frac{1}{\bar{E}(t,\tau)} \dot{\sigma}(\tau) d\tau + \int_{t_0}^t \frac{1}{\eta(\tau)} \sigma(\tau) d\tau \quad (6.41)$$

$\bar{E}$  est une fonction de  $\tau$  (voir figures 6-4 et 6-7). Cette équation doit être vérifiée  $\forall t$ , ce qui implique

$$\frac{1}{\bar{E}(t,\tau)} \dot{\sigma}(\tau) + \frac{1}{\eta(\tau)} \sigma(\tau) = \dot{\varepsilon}(\tau) \quad (6.42)$$

D'où, il vient

$$\dot{\sigma}(\tau) = -\frac{\bar{E}(t,\tau)}{\eta(\tau)} \sigma(\tau) + \bar{E}(t,\tau) \dot{\varepsilon}(\tau) \quad (6.43)$$

La résolution de cette équation différentielle du 1<sup>ier</sup> ordre à coefficients variables donne

$$\sigma(\tau) = \bar{E}(\tau, t_0) e^{-\int_{t_0}^{\tau} \frac{\bar{E}(t, \theta)}{\eta(\theta)} d\theta} \varepsilon(t_0) + \int_{t_0}^{\tau} \bar{E}(\tau, \xi) e^{-\int_{\xi}^{\tau} \frac{\bar{E}(t, \theta)}{\eta(\theta)} d\theta} \dot{\varepsilon}(\xi) d\xi \quad (6.44)$$

Ce qui peut encore s'écrire

$$\sigma(\tau) = \bar{R}(\tau, t_0) \varepsilon(t_0) + \int_{t_0}^{\tau} \bar{R}(\tau, \xi) \dot{\varepsilon}(\xi) d\xi \quad (6.45)$$

avec

$$\bar{R}(\tau, \xi) = \bar{E}(\tau, \xi) e^{-\int_{\xi}^{\tau} \frac{\bar{E}(t, \theta)}{\eta(\theta)} d\theta} \quad (6.46)$$

$\bar{R}(\tau, \xi)$  apparait donc comme la fonction de relaxation qui tient compte de l'effet hygroverrou relatif à l'incrément de chargement appliqué à l'instant  $\xi$ . On remarque que dans le cas d'un matériau viscoélastique linéaire à comportement constant (correspondant au cas d'un matériau viscoélastique non-vieillissant), on retrouve l'équation (2.56)

$$R(\xi, t) = E e^{-\frac{E}{\eta}(t-\xi)} \quad (6.47)$$

En suivant une démarche similaire, le développement de la formulation analytique pour le modèle de la Figure 6-12 (b) conduit à une forme en fluage plus complexe basée sur la partition de la contrainte [HUS 09]

$$\varepsilon(t) = \int_0^t \left( \int_{\tau}^t \frac{1}{\eta(\xi)} e^{-\int_{\tau}^{\xi} \frac{\bar{E}(t, \theta)}{\eta(\theta)} d\theta} d\xi \right) \dot{\sigma}(\tau) d\tau \quad (6.48)$$

La résolution des équations intégrales (6.45) et (6.48) est très complexe du fait de leur dépendance vis-à-vis du module d'élasticité  $\bar{E}$  qui traduit l'histoire de l'état hydrique en fonction de l'instant d'application de l'incrément de chargement. Ceci rend le développement d'une formulation incrémentale impossible, ce qui implique d'opter pour une résolution numérique par discrétisation.

### 6.2.3.2 Résolution numérique

Dans ce paragraphe, par souci de simplicité, on établit une formulation numérique par discrétisation des équations relatives aux éléments du modèle de la Figure 6-12 (a) sur l'intervalle  $[t, t + \Delta t]$ . En application du §6.1.3.2, l'incrément de déformation élastique hygroverrou dans le cas général d'un chargement et d'une teneur en eau variables, est donné par

$$\Delta \varepsilon_{e,HL} = \varepsilon_{e,HL}(t + \Delta t) - \varepsilon_{e,HL}(t) \quad (6.49)$$

où  $\varepsilon_{e,HL}(t)$  est donné par l'équation (6.36). D'où il vient :

$$\Delta \varepsilon_{e,HL} = \sum_{i=0}^N \frac{\Delta \sigma_i}{\bar{E}_i(t + \Delta t)} - \sum_{i=0}^{N-1} \frac{\Delta \sigma_i}{\bar{E}_i(t)} \quad (6.50)$$

Soit

$$\Delta \varepsilon_{e,HL} = \frac{\Delta \sigma_N}{\bar{E}_N(t + \Delta t)} + \sum_{i=0}^{N-1} \left( \frac{\Delta \sigma_i}{\bar{E}(t + \Delta t)} - \frac{\Delta \sigma_i}{\bar{E}(t)} \right) \quad (6.51)$$

Ce qui peut encore s'écrire

$$\Delta \varepsilon_{e,HL} = S_e(t) \Delta \sigma_i + \varepsilon_e^{hist}(t) \quad (6.52)$$

avec

$$\begin{cases} S_e(t) = \frac{1}{E(t+\Delta t)} \\ \varepsilon_e^{hist}(t) = \sum_{i=0}^{N-1} \left( \frac{1}{\bar{E}_i(t+\Delta t)} - \frac{1}{\bar{E}_i(t)} \right) \Delta \sigma_i \end{cases} \quad (6.53)$$

$S_e$  et  $\varepsilon_e^{hist}$  sont respectivement la complaisance et la déformation héréditaire fictives associées au ressort hygroverrou élastique. En utilisant la forme discrétisée de la loi de comportement du piston sur l'intervalle  $[t, t + \Delta t]$  et en supposant que la fonction  $\beta(t) = \frac{1}{\eta(t)}$  varie de façon linéaire sur cet intervalle, l'incrément de déformation visqueuse s'écrit [HUS 09]

$$\Delta \varepsilon_v = S_v(t) \Delta \sigma + \varepsilon_v^{hist}(t) \quad (6.54)$$

avec

$$\begin{cases} S_v(t) = \frac{\beta(t)+2\beta(t+\Delta t)}{6} \Delta t \\ \varepsilon_v^{hist}(t) = \frac{\beta(t)+\beta(t+\Delta t)}{2} \Delta t \sigma(t) \end{cases} \quad (6.55)$$

$S_v$  et  $\varepsilon_v^{hist}$  sont respectivement la complaisance et la déformation héréditaire fictives associées au piston. En sommant les équations (6.52) et (6.54) en application du principe de partition de la déformation, on obtient

$$\Delta \varepsilon = \Delta \varepsilon_{e,HL} + \Delta \varepsilon_v \Rightarrow \Delta \varepsilon = S(t) \Delta \sigma + \varepsilon^{hist}(t) \quad (6.56)$$

avec

$$\begin{cases} S(t) = \frac{1}{E(t+\Delta t)} + \frac{\beta(t)+2\beta(t+\Delta t)}{6} \Delta t \\ \varepsilon^{hist}(t) = \sum_{i=0}^{N-1} \left( \frac{1}{\bar{E}_i(t+\Delta t)} - \frac{1}{\bar{E}_i(t)} \right) \Delta \sigma_i + \frac{\beta(t)+\beta(t+\Delta t)}{2} \Delta t \sigma(t) \end{cases} \quad (6.57)$$

L'équation (6.56) représente la forme incrémentale de la loi de comportement viscoélastique mécanosorptive basée sur le modèle analogique élémentaire décrit par la Figure 6-12 (a).

## 6.2.4 Modèles à effet hygroverrou couplé

### 6.2.4.1 Principe et modèles élémentaires

Dans l'hypothèse du comportement hygroverrou pseudo élastique,  $\varepsilon_{HL}$  compense la part bloquée de la déformation élastique due à la variation du module d'élasticité lors du séchage. Afin de tenir compte des effets différés, cette déformation est couplée à un piston qui représente l'effet viscoélastique. Dans l'hypothèse de la partition de la déformation, ceci se traduit par :

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_{HL}(t) + \varepsilon_{ve}(t) \quad (6.58)$$

La forme duale correspondant à la partition de la contrainte s'écrit

$$\sigma(t) = \sigma_{HL}(t) + \sigma_{ve}(t) \quad (6.59)$$

Les équations (6.58) et (6.59) peuvent être représentées par les modèles rhéologiques donnés sur les Figures 6.13 et 6.14. Sur ces deux figures, un modèle de Maxwell (Figure 6-13) ou de Kelvin (Figure 6-14) se trouve associé en série (Figure 6-13 (a) et Figure 6-14 (a)) ou en parallèle (Figure 6-13 (b) et Figure 6-14 (b)) avec un ressort hygroverrou.

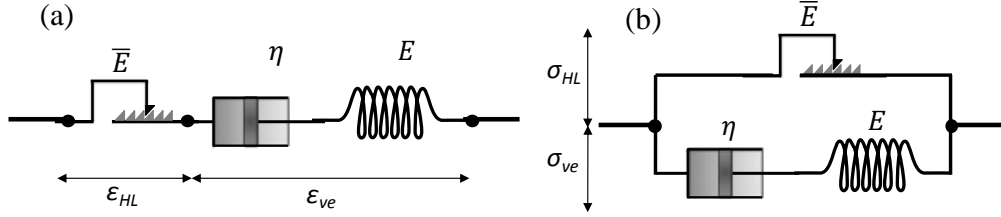


Figure 6-13 : Modèles à effet hygroverrou viscoélastique (basés sur un modèle de Maxwell).

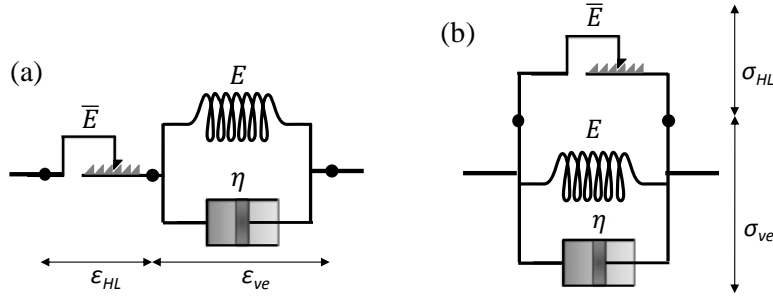


Figure 6-14 : Modèles à effet hygroverrou viscoélastique (basés sur un modèle de Kelvin).

### 6.2.4.2 Formulation viscoélastique à paramètres variables

#### 6.2.4.2.1 Construction de la loi de comportement

L'objectif de ce paragraphe est de développer une loi de comportement purement viscoélastique basée sur un modèle de Maxwell généralisé avec des paramètres  $E_\mu$  et  $\alpha_\mu$  ( $\mu = 1..r$ ) variables au cours du temps. Cette formulation sera utilisée ultérieurement pour l'établissement de la forme incrémentale du modèle de comportement mécanosorptif viscoélastique. Dans le présent cas l'équation différentielle d'une branche de Maxwell s'écrit à tout instant  $t$

$$\dot{\sigma}_\mu(t) = \left( \frac{\dot{E}_\mu(t)}{E_\mu(t)} - \frac{E_\mu(t)}{\eta_\mu(t)} \right) \sigma_\mu(t) + E_\mu(t) \dot{\varepsilon}(t) \quad (6.60)$$

La solution de cette équation est de la forme

$$\sigma_\mu(t) = e^{I_\mu(t)} \left[ \sigma(t_0) + \int_{t_0}^t E_\mu(\tau) \dot{\varepsilon}(\tau) e^{-I_\mu(\tau)} d\tau \right] \text{ avec : } I_\mu(\tau) = \int_{t_0}^\tau \left( \frac{\dot{E}_\mu(\xi)}{E_\mu(\xi)} - \frac{E_\mu(\xi)}{\eta_\mu(\xi)} \right) d\xi \quad (6.61)$$



Le développement de l'équation (6.61), en posant  $\alpha_\mu(\xi) = \frac{E_\mu(\xi)}{\eta_\mu(\xi)}$ , conduit à l'expression suivante

$$\sigma_\mu(t) = e^{\ln\left(\frac{E_\mu(t)}{E_\mu(t_0)}\right) - \int_{t_0}^t \alpha_\mu(\xi) d\xi} \sigma(t_0) + \int_{t_0}^t E_\mu(\tau) e^{\ln\left(\frac{E_\mu(t)}{E_\mu(\tau)}\right) - \int_\tau^t \alpha_\mu(\xi) d\xi} \dot{\varepsilon}(\tau) d\tau \quad (6.62)$$

ou encore

$$\sigma_\mu(t) = E_\mu(t) e^{-\int_{t_0}^t \alpha_\mu(\xi) d\xi} \varepsilon_\mu(t_0) + \int_{t_0}^t E_\mu(\tau) e^{-\int_\tau^t \alpha_\mu(\xi) d\xi} \dot{\varepsilon}(\tau) d\tau \quad \forall \mu = 1..r \quad (6.63)$$

Pour la branche  $\mu = 0$  correspondant au ressort seul, l'équation est celle de la loi de Hooke

$$\sigma_0(t) = E_0(t) \varepsilon(t) \quad (6.64)$$

Compte tenu de l'hypothèse de partition de la contrainte, la généralisation est obtenue en sommant les contraintes  $\sigma_\mu(t)$  pour les  $r + 1$  branches du modèle de Maxwell généralisé. Compte tenu des équations (6.63) et (6.64), la loi de comportement s'exprime sous une forme intégrale de la manière suivante en fonction de la fonction de relaxation  $R^*$

$$\sigma(t) = R^*(t_0, t) \varepsilon(t_0) + \int_{t_0}^t R^*(\tau, t) \dot{\varepsilon}(\tau) d\tau \quad (6.65)$$

où

$$R^*(t_0, t) = E_0(t) + \sum_{\mu=1}^r E_\mu(t) e^{-\int_{t_0}^t \alpha_\mu(\xi) d\xi} \quad (6.66)$$

La fonction de relaxation  $R^*$  prend donc la forme d'une série de Dirichlet, ce qui permet de reformuler la loi de comportement sous une forme incrémentale à pas de temps fini.

#### 6.2.4.2.2 Formulation incrémentale de la loi de comportement

Dans ce paragraphe, on conditionne l'équation intégrale (6.66) pour la mettre sous une forme incrémentale. À l'instant  $t + \Delta t$ , l'équation (6.63) s'écrit  $\forall \mu = 1..r$

$$\sigma_\mu(t + \Delta t) = E_\mu(t + \Delta t) e^{-\int_{t_0}^{t+\Delta t} \alpha_\mu(\xi) d\xi} \varepsilon(t_0) + \int_{t_0}^{t+\Delta t} E_\mu(\tau) e^{-\int_\tau^{t+\Delta t} \alpha_\mu(\xi) d\xi} \dot{\varepsilon}(\tau) d\tau \quad (6.67)$$

En posant  $\Delta E_\mu = E_\mu(t + \Delta t) - E_\mu(t)$ , l'équation (6.67) devient, après arrangement

$$\sigma_\mu(t + \Delta t) = E_\mu(t) \left(1 + \frac{\Delta E_\mu}{E_\mu}\right) \left[ e^{-\int_t^{t+\Delta t} \alpha_\mu(\xi) d\xi} \left( e^{-\int_{t_0}^t \alpha_\mu(\xi) d\xi} \varepsilon(t_0) + \int_{t_0}^t e^{-\int_\tau^t \alpha_\mu(\xi) d\xi} \dot{\varepsilon}(\tau) d\tau \right) + \int_t^{t+\Delta t} e^{-\int_\tau^{t+\Delta t} \alpha_\mu(\xi) d\xi} \dot{\varepsilon}(\tau) d\tau \right] \quad (6.68)$$

Ce qui, compte tenu de l'expression de  $\sigma_\mu(t)$  donnée par l'équation (6.63) et en admettant d'approcher les variations de  $\alpha_\mu$  et  $\varepsilon$  par des formes linéaires sur l'intervalle  $[t, t + \Delta t]$ , conduit finalement à l'expression suivante pour l'incrément de la contrainte sur l'intervalle  $[t, t + \Delta t]$

$$\begin{aligned} \Delta \sigma_\mu = \sigma_\mu(t) & \left[ \left(1 + \frac{\Delta E_\mu}{E_\mu(t)}\right) e^{-\left(\frac{\alpha_\mu(t+\Delta t) + \alpha_\mu(t)}{2}\right) \Delta t} - 1 \right] \\ & + \frac{\Delta \varepsilon}{\Delta t} (E_\mu(t) + \Delta E_\mu) \left[ \frac{1}{\alpha_\mu(t+\Delta t)} - \frac{2}{\alpha_\mu(t+\Delta t) + \alpha_\mu(t)} e^{-\left(\frac{\alpha_\mu(t+\Delta t) + \alpha_\mu(t)}{2}\right) \Delta t} \right] \end{aligned} \quad (6.69)$$

Ce qui peut encore s'écrire, pour la branche  $\mu$  du modèle de Maxwell

$$\Delta\sigma_\mu = \tilde{E}_\mu(t)\Delta\varepsilon - \sigma_\mu^{hist}(t) \quad (6.70)$$

avec

$$\begin{cases} \sigma_\mu^{hist}(t) = \left[ 1 - \left( 1 + \frac{\Delta E_\mu}{E_\mu} \right) e^{-\left( \frac{\alpha_\mu(t+\Delta t) + \alpha_\mu(t)}{2} \right) \Delta t} \right] \sigma_\mu(t) \\ \tilde{E}_\mu(t) = \frac{(E_\mu(t) + \Delta E_\mu)}{\Delta t} \left[ \frac{1}{\alpha_\mu(t+\Delta t)} - \frac{2}{\alpha_\mu(t+\Delta t) + \alpha_\mu(t)} e^{-\left( \frac{\alpha_\mu(t+\Delta t) + \alpha_\mu(t)}{2} \right) \Delta t} \right] \end{cases} \quad (6.71)$$

Pour la branche  $\mu = 0$  (ressort seul) compte tenu de l'équation (6.64) l'incrément de contrainte s'écrit

$$\Delta\sigma_0 = E_0(t + \Delta t)\varepsilon(t + \Delta t) - E_0(t)\varepsilon(t) \Rightarrow \Delta\sigma_0 = (E_0(t) + \Delta E_0)\Delta\varepsilon + \Delta E_0 \cdot \varepsilon(t) \quad (6.72)$$

Finalement, la forme incrémentale à pas de temps fini basée sur le modèle de Maxwell généralisé est obtenue en sommant les contributions des différentes branches élémentaires données par les équations (6.70) à (6.72). Ce qui conduit finalement à la forme incrémentale suivante

$$\Delta\sigma = \tilde{E}(t)\Delta\varepsilon - \sigma^{hist}(t) \quad (6.73)$$

avec

$$\begin{cases} \tilde{E}(t) = (E_0(t) + \Delta E_0) + \sum_{\mu=1}^r \frac{(E_\mu(t) + \Delta E_\mu)}{\Delta t} \left[ \frac{1}{\alpha_\mu(t+\Delta t)} - \frac{2}{\alpha_\mu(t+\Delta t) + \alpha_\mu(t)} e^{-\left( \frac{\alpha_\mu(t+\Delta t) + \alpha_\mu(t)}{2} \right) \Delta t} \right] \\ \sigma^{hist}(t) = -\Delta E_0 \cdot \varepsilon(t) + \sum_{\mu=1}^r \left[ 1 - \left( 1 + \frac{\Delta E_\mu}{E_\mu} \right) e^{-\left( \frac{\alpha_\mu(t+\Delta t) + \alpha_\mu(t)}{2} \right) \Delta t} \right] \sigma_\mu(t) \end{cases} \quad (6.74)$$

Dans le cas où le module d'élasticité et le coefficient de viscosité sont constants «  $\Delta E_\mu = 0$  ;  $\alpha_\mu(t + \Delta t) = \alpha_\mu(t)$  », on retrouve la formulation incrémentale (2.62).

### 6.2.4.3 Formulation mécanosorptive viscoélastique

#### 6.2.4.3.1 Lois de comportement

Dans ce qui suit, on se réfère au modèle de la Figure 6.13(a) qui sera utilisé ultérieurement pour la construction du modèle généralisé dont il constituera la branche élémentaire (voir Figure 6.15). Les essais mécanosorptifs réalisés en relaxation (§ 5.2) ont mis en évidence qu'en phase de séchage, la réponse en termes de contrainte réduite à une déformation imposée constante est indépendante de la variation d'humidité (Figure 5-6). Sur cette base, on suppose dans ce qui suit qu'en phase de séchage, le comportement hydromécanique du bois obéit à la loi de Boltzmann à paramètres constants (2.10), tandis qu'en phase d'humidification, il obéit à la loi de Boltzmann à paramètres variables (6.65). On rappelle que la fonction  $R$  s'exprime dans le cas de séchage ( $\dot{w} < 0$ ) par l'équation (2.55) et dans le cas d'humidification ( $\dot{w} \geq 0$ ) par l'équation (6.66). Compte tenu des deux dernières équations, l'évolution de la contrainte interne dans chaque branche  $\mu$  pour une déformation imposée s'écrit

$$\sigma_\mu(t) = E_\mu(t_0) e^{-\int_{t_0}^t \alpha_\mu(t_0) d\xi} \varepsilon(t_0) \quad (\text{séchage}) \quad (6.75)$$

$$\sigma_\mu(t) = E_\mu(t) e^{-\int_{t_0}^t \alpha_\mu(\xi) d\xi} \varepsilon(t_0) \quad (\text{humidification}) \quad (6.76)$$

Dans le cas d'une variation quelconque de la teneur en eau, on introduit le module  $\bar{E}$  conformément à la Figure 6-2. Ainsi en combinant les équations (6.75) et (6.76) on obtient

$$\sigma_\mu(t) = \bar{E}_\mu(t, t_0) e^{-\int_{t_0}^t \bar{\alpha}_\mu(\xi) d\xi} \varepsilon(t_0) \text{ avec } \bar{\alpha}_\mu(\xi) = \frac{\bar{E}_\mu}{\eta_\mu} \quad \forall \dot{w} \quad (6.77)$$

En application de la loi de Boltzmann, la généralisation de cette relation au cas d'une déformation imposée variable  $\varepsilon(t)$  discrétisée en petits incréments  $\Delta\varepsilon_i$ , s'écrit pour la branche  $\mu$

$$\sigma_\mu(t) = \bar{E}_\mu(t, t_0) e^{-\int_{t_0}^t \bar{\alpha}_\mu(\xi) d\xi} \varepsilon(t_0) + \sum_{i=1}^n \Delta\varepsilon_i \bar{E}_\mu(t, t_i) e^{-\int_{t_0}^{t_i} \bar{\alpha}_\mu(\xi) d\xi} \quad (6.78)$$

Mise sous forme intégrale, l'équation précédente s'écrit

$$\sigma_\mu(t) = \bar{E}_\mu(t, t_0) e^{-\int_{t_0}^t \bar{\alpha}_\mu(\xi) d\xi} \varepsilon(t_0) + \int_{t_0}^t \bar{E}_\mu(t, \tau) e^{-\int_\tau^t \bar{\alpha}_\mu(\xi) d\xi} \dot{\varepsilon}(\tau) d\tau \quad (6.79)$$

On retrouve ainsi l'équation intégrale (6.44) précédemment établie dans le cas du modèle à effet hygroverrou partiellement couplé. Ceci confirme l'équivalence de l'approche ci-dessus avec celle retenue au § 6.2.3.

#### 6.2.4.3.2 Résolution numérique

Sur la base des développements précédents, on établit finalement la formulation incrémentale de la loi de comportement viscoélastique mécanosorptive correspondant au modèle généralisé (Figure 6.15) bâti à partir du modèle de la Figure 6.13(a) dont il constitue la branche élémentaire. La formulation numérique de la loi de comportement de cette branche élémentaire, basée sur l'équation (6.79), a été déjà exposée au §6.2.3.2.

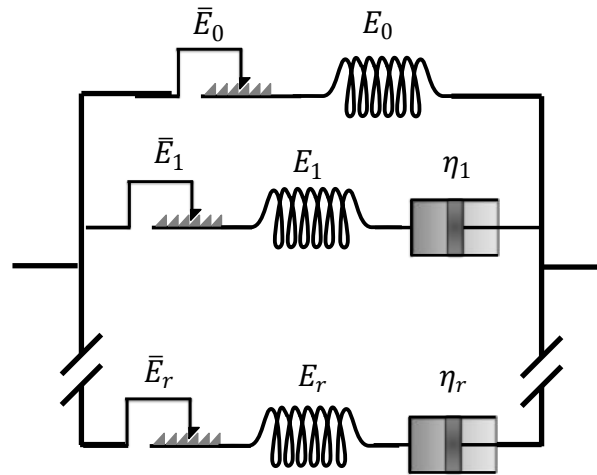


Figure 6-15 : Modèle de Maxwell généralisé avec ressorts hygroverrous.

Dans ce qui suit, on établit la formulation numérique incrémentale pour le modèle généralisé par combinaison des formes incrémentales qui découlent de l'équation intégrale de Boltzmann à paramètres constants donnée par l'équation (2.62) et de celle à paramètres variables donnée par l'équation (6.73). D'où :

$$\Delta\sigma = \tilde{E} \Delta\varepsilon - \sigma^{hist} \quad (6.80)$$

avec

$$\tilde{E}(t) = \begin{cases} E_0 + \sum_{\mu=1}^r \frac{E_{\mu}}{\alpha_{\mu} \Delta t} (1 - e^{-\alpha_{\mu} \Delta t}) & (\dot{w} < 0) \\ (E_0(t) + \Delta E_0) + \sum_{\mu=1}^r \frac{(E_{\mu}(t) + \Delta E_{\mu})}{\Delta t} \left[ \frac{1}{\alpha_{\mu}(t + \Delta t)} - \frac{2}{\alpha_{\mu}(t + \Delta t) + \alpha_{\mu}(t)} e^{-\left(\frac{\alpha_{\mu}(t + \Delta t) + \alpha_{\mu}(t)}{2}\right) \Delta t} \right] & (\dot{w} \geq 0) \end{cases} \quad (6.81)$$

$$\sigma^{hist}(t) = \begin{cases} \sum_{\mu=1}^r (1 - e^{-\alpha_{\mu} \Delta t}) \sigma_{\mu}(t) & (\dot{w} < 0) \\ -\Delta E_0 \cdot \varepsilon(t) + \sum_{\mu=1}^r \left[ 1 - \left( 1 + \frac{\Delta E_{\mu}}{E_{\mu}} \right) e^{-\left(\frac{\alpha_{\mu}(t + \Delta t) + \alpha_{\mu}(t)}{2}\right) \Delta t} \right] \sigma_{\mu}(t) & (\dot{w} \geq 0) \end{cases} \quad (6.82)$$

Compte tenu de la définition du module  $\bar{E}$ , les équations précédentes s'écrivent finalement

$$\Delta \sigma = \tilde{E} \Delta \varepsilon - \sigma^{hist} \quad (6.83)$$

avec

$$\begin{cases} \tilde{E}(t) = \bar{E}_{0,N}(t + \Delta t) + \sum_{\mu=1}^r \frac{\bar{E}_{\mu,N}(t + \Delta t)}{\Delta t} \left[ \frac{1}{\bar{\alpha}_{\mu,N}(t + \Delta t)} - \frac{2}{\bar{\alpha}_{\mu,N}(t + \Delta t) + \bar{\alpha}_{\mu,N}(t)} e^{-\left(\frac{\bar{\alpha}_{\mu,N}(t + \Delta t) + \bar{\alpha}_{\mu,N}(t)}{2}\right) \Delta t} \right] \\ \sigma^{hist}(t) = \sum_{i=0}^{N-1} \left[ \frac{\bar{E}_{0,i}(t + \Delta t) - \bar{E}_{0,i}(t)}{\bar{E}_{0,i}(t)} \Delta \sigma_{0,i} + \sum_{\mu=1}^r \left[ 1 - \left( 1 + \frac{\bar{E}_{\mu,i}(t + \Delta t) - \bar{E}_{\mu,i}(t)}{\bar{E}_{\mu,i}(t)} \right) e^{-\left(\frac{\bar{\alpha}_{\mu,i}(t + \Delta t) + \bar{\alpha}_{\mu,i}(t)}{2}\right) \Delta t} \right] \Delta \sigma_{\mu,i} \right] \end{cases} \quad (6.84)$$

$\tilde{E}$  et  $\sigma^{hist}$  représentent le module d'élasticité fictif et le terme d'histoire. Ces deux grandeurs dépendent des modules  $\bar{E}_{\mu,i}(t)$  qui sont les valeurs minimales prises par les modules  $E_{\mu}$ , relatives à chaque incrément  $\Delta \sigma_i$  de la contrainte survenue à l'instant  $t_i$ . L'équation (6.83) formule la loi de comportement viscoélastique mécanosorptive sous une forme incrémentale. Par rapport aux équations (6.56) et (6.57) établies au §6.2.3.2 elle présente l'avantage d'être établie pour un pas de temps fini, ce qui la rend plus performante tout en étant peu sensible à la taille du pas de temps.

### 6.3 Conclusion

Dans ce chapitre, des modèles rhéologiques permettant de modéliser le comportement viscoélastique mécanosorptif ont été présentés. Les formalismes analytiques de ces approches découlent des constatations expérimentales. Dans un premier temps, un modèle pseudo élastique basé sur la loi de Hooke en humidification et la loi de Bazant en séchage a été développé en rigidité. Ensuite, trois familles de modèles rhéologiques ont été proposées. Celles-ci se classent en fonction du principe de partition de la déformation ou de la contrainte et de leur couplage. Enfin, pour chacune de ces familles une formulation analytique et la mise en forme incrémentale ont été développées. Ces formulations seront utilisées au dernier chapitre de ce travail pour la simulation et l'analyse des résultats expérimentaux.



## Chapitre 7. SIMULATIONS NUMERIQUES ET VALIDATION

Dans ce chapitre, les lois de comportement viscoélastique et mécanosorptive développées au chapitre précédent sur la base des modèles rhéologiques généralisés, sont mises en œuvres numériquement en vue de leur validation par comparaison avec les résultats expérimentaux présentés dans les chapitres 4 et 5.

### 7.1 Application à la simulation du comportement pseudo-élastique hygroverrou

Dans cette section, les approches en rigidité et en complaisance présentées aux §6.1.2 et §6.1.3 ont été implémentées sur Matlab®. Dans ce qui suit, leur application à deux exemples correspondant à des cas de chargement et d'humidité relative variables est présentée et discutée.

#### 7.1.1 Chargement en paliers de déformation et humidité variable

Dans cette première simulation, trois paliers de déformation sont imposés (Figure 7-1(a)). Dans le même temps, le matériau est supposé subir les variations de teneur en eau présentées à la Figure 7-1 (b). Conformément aux observations faites au chapitre 4, le module d'élasticité est supposé suivre une loi linéaire en fonction de la teneur en eau (Figure 7-1(c)). La variation de la teneur en eau au cours du temps est choisie de telle sorte que  $\bar{w}$  soit différente pour chaque palier de chargement.

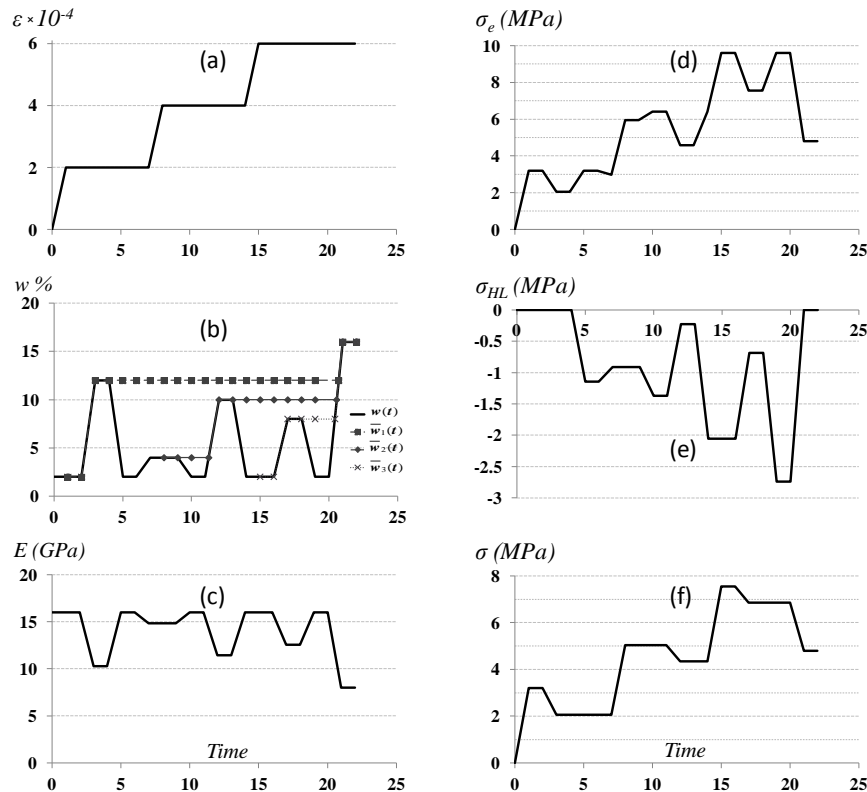


Figure 7-1. Simulation en rigidité : chargement en déformation (a) et teneur en eau (b) variables ; module d'élasticité (c) ; contrainte élastique (d) ; contrainte hygroverrou (e) ; contrainte totale (f).

La fraction élastique  $\sigma_e$  est calculée selon la loi de Hooke (Figure 7-1 (d)) ; la fraction hygroverrou  $\sigma_{HL}$  est donnée par l'équation (6.27) (Figure 7-1 (e)). La contrainte résultante réduite  $\sigma$  est la somme

de ces deux fractions (voir équation (6.11)) ; elle est donnée directement par l'expression (6.28), (Figure 7-1 (f)). On remarque sur la Figure 7-1 (e) que  $\sigma_{HL}$  est toujours négative, ce qui est en accord avec les observations expérimentales pour une sollicitation de traction sous humidité variable ou nulle (Chapitre 5, Figures 5-6 et 5-7).

Dans un second temps, la sollicitation est appliquée sous la forme de la contrainte  $\sigma(t)$  solution du problème précédent et décrite par la Figure 7-1 (f). La réponse est cette fois calculée par l'approche en complaisance pour la même variation de la teneur en eau (Figure 7-1(b)).

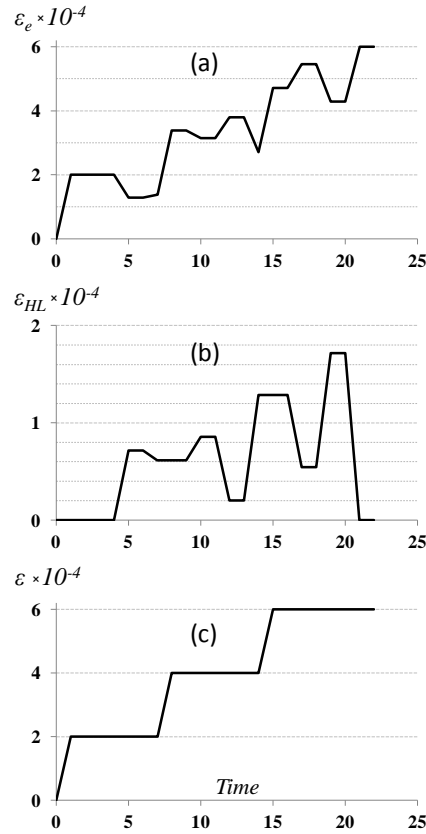


Figure 7-2. Simulation de la déformation au cours du temps pour le chargement en contrainte de la Figure 7-1(f) : composante élastique (a) ; composante hygroverrou (b) ; déformation réduite (c).

La Figure 7-2 montre les résultats de la simulation au cours du temps : la fraction élastique  $\varepsilon_e$  (Figure 7-2 (a)) est calculée via la loi de Hooke compte tenu de l'évolution du module représenté à la Figure 7-1(c) ; la fraction  $\varepsilon_{HL}$  (Figure 7-2 (b)) est calculée par l'équation (6.35). On remarque que pour une contrainte positive (traction),  $\varepsilon_{HL}$  est positive à tout instant, ce qui est en accord avec l'hypothèse de blocage de la déformation. De plus, on retrouve la relation de proportionnalité postulée entre  $\varepsilon_{HL}$  et  $\sigma_{HL}$  dans le cadre thermodynamique rappelé à la section 6.1 :

$$\sigma_{HL} = -E(w)\varepsilon_{HL} \quad (7.1)$$

La déformation réduite résultante (Figure 7-2 (c)) est calculée par l'intermédiaire de l'équation (6.36) ; elle peut également être déduite directement de la somme de  $\varepsilon_e$  et  $\varepsilon_{HL}$ . On remarque que la déformation résultante ainsi obtenue est la même que celle appliquée comme valeur d'entrée dans la première simulation. Ce résultat confirme l'équivalence des deux approches duales en rigidité et en complaisance, l'application de la seconde en prenant comme variable d'entrée le résultat issu de la première permettant de retrouver le mode de sollicitation pris comme variable d'entrée pour le premier exemple.

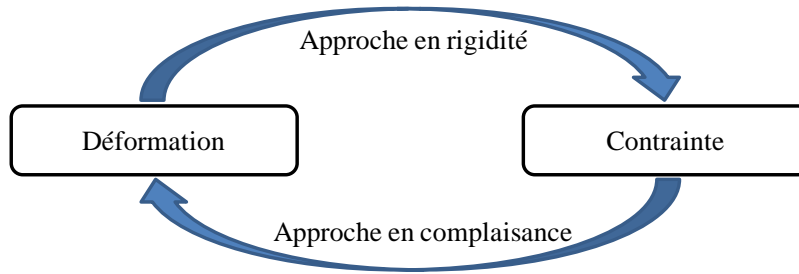


Figure 7-3 : Équivalence des deux approches duales.

### 7.1.2 Simulation pour une contrainte et une teneur en eau cycliques

Dans cet exemple, on simule la réponse mécanique sous une sollicitation en contrainte et humidité variables. Pour la variation de la contrainte, on considère la fonction périodique suivante :

$$\sigma = \sigma_m + \sigma_a \cos \omega t \quad (7.2)$$

$\sigma_a$  est l'amplitude et  $\omega$  la pulsation. Simultanément, le matériau est soumis à la variation sinusoïdale de la teneur en eau, avec un déphasage  $\varphi$  par rapport à la variation de la contrainte :

$$w (\%) = w_m + w_a \cos(\omega t - \varphi) \quad (7.3)$$

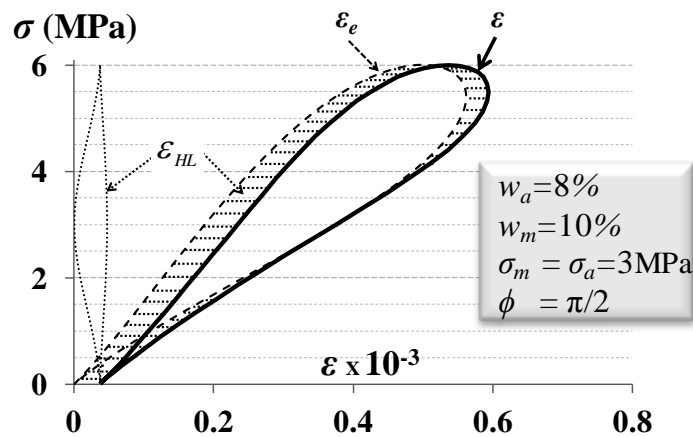


Figure 7-4 : Courbes contraintes-déformations issues de la formulation.

La Figure 7-4 montre les courbes contrainte-déformation pour un cycle de sollicitation de données  $\sigma_a = \sigma_m = 3$  MPa,  $w_m = 10\%$ ,  $w_a = 8\%$  et un angle de déphasage  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ . Le premier cycle (non représenté) constitue une phase transitoire correspondant à la création de  $\epsilon_{HL}$ . Les boucles d'hystérésis sont ensuite superposées pour les cycles suivants. L'aire hachurée représente la déformation hygroverrou  $\epsilon_{HL}$  qui s'ajoute à la déformation élastique  $\epsilon_e$  pour former la déformation réduite  $\epsilon$ .

La Figure 7-5 montre les courbes contrainte-déformation obtenues par simulation pour différentes valeurs de l'angle de déphasage  $\varphi$ , pour  $\sigma_a = 3$  MPa et deux contraintes moyennes différentes  $\sigma_m = 3$  MPa (contrainte répétée) et  $\sigma_m = 0$  (contrainte alternée).



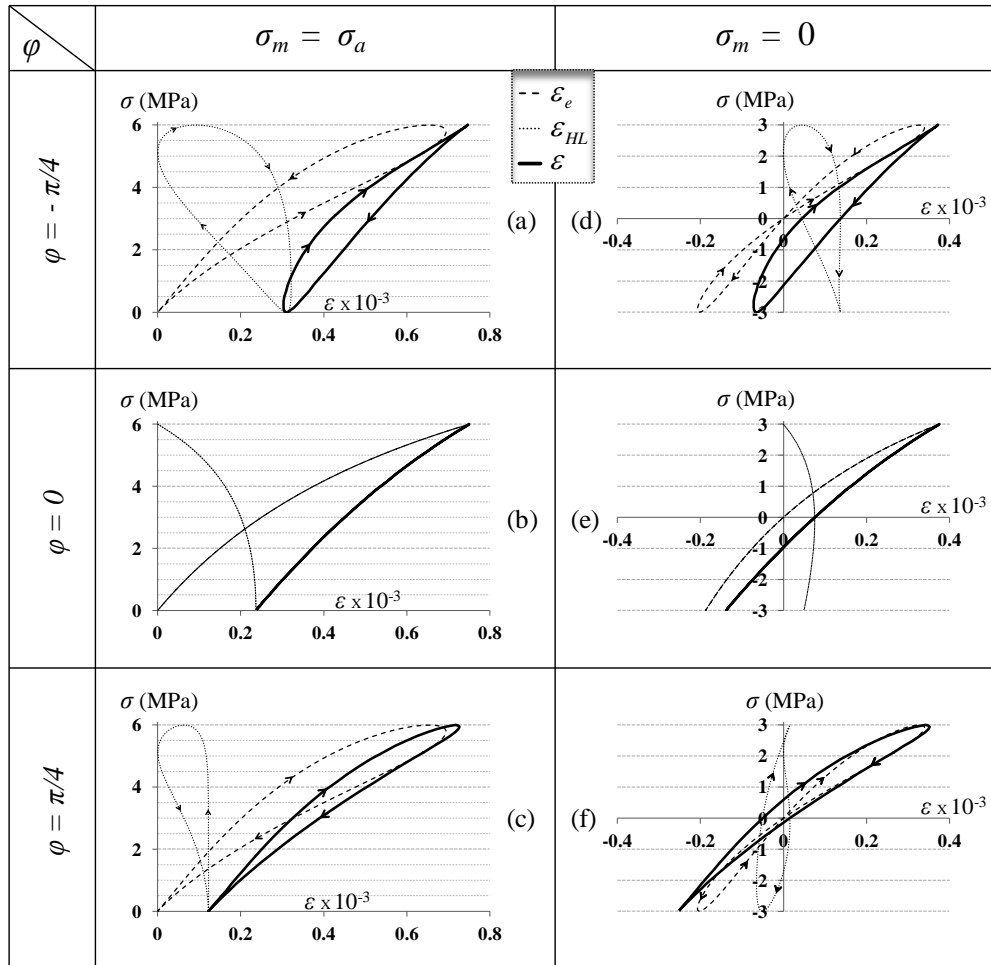


Figure 7-5. Courbes contrainte-déformation pour différents modes de sollicitation.

On remarque sur la Figure 7-5 que les formes du diagramme contrainte-déformation résultant d'une manière générale, et de l'évolution de la déformation hygroverrou  $\epsilon_{HL}$  en particulier, sont très dépendantes des paramètres du cycle de contrainte et de l'angle de déphasage  $\varphi$ . En particulier, on observe que  $\epsilon_{HL} > 0$  dans pratiquement tous les cas, sauf pour  $\varphi = \frac{\pi}{4}$  et  $\sigma_m = 0$ . On remarque également que pour un angle de déphasage nul (Figure 7-5 (b) et (e)), les boucles d'hystérésis se referment (remplacées par une ligne). Ceci montre l'importance de l'angle de déphasage et de la contrainte moyenne sur le comportement et le signe de la déformation hygroverrou.

## 7.2 Application à la simulation du comportement viscoélastique

Dans un premier temps, on compare les courbes calculées via la formulation viscoélastique incrémentale (§6.2.4.2) et les courbes issues des données expérimentales sous humidité constante (§4.3.3) et sous humidité variable (§5.2.2). Dans un second temps, le modèle numérique est appliqué à l'évaluation des contraintes dans une rondelle de bois vert en cours de dessiccation.

### 7.2.1 Comportement en relaxation et fluage

La formulation incrémentale développée au §6.2.4.2.2 est utilisée pour retrouver les courbes de relaxation issues des essais.

La Figure 7-6 montre la comparaison des courbes calculées (traits discontinus) à l'aide de l'expression (6.73) avec les courbes déduites des essais de relaxation (traits continus) présentées à la figure 4.19 (a) pour des humidités relatives de 30%, 50% et 70%. On remarque que les courbes sont très proches, ce qui confirme la validité de la formulation incrémentale à humidité relative constante.

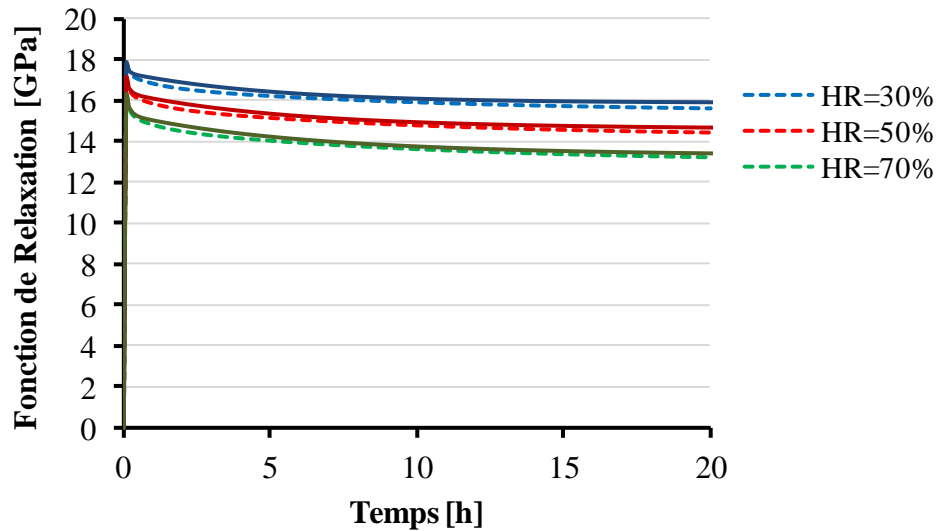


Figure 7-6 : Comparaison des courbes de relaxation simulées (traits discontinus) et des courbes déduites des essais (traits continus).

De même, la Figure 7-7 présente la comparaison des courbes de fluage relatif obtenues par l'équation (4.9) déduite des essais, avec celles calculées par la formulation incrémentale (6.73) pour différents taux d'humidité relative. Comme précédemment, on remarque que les courbes sont très proches, ce qui confirme la validité de la formulation incrémentale pour la simulation en fluage sous humidité relative constante.

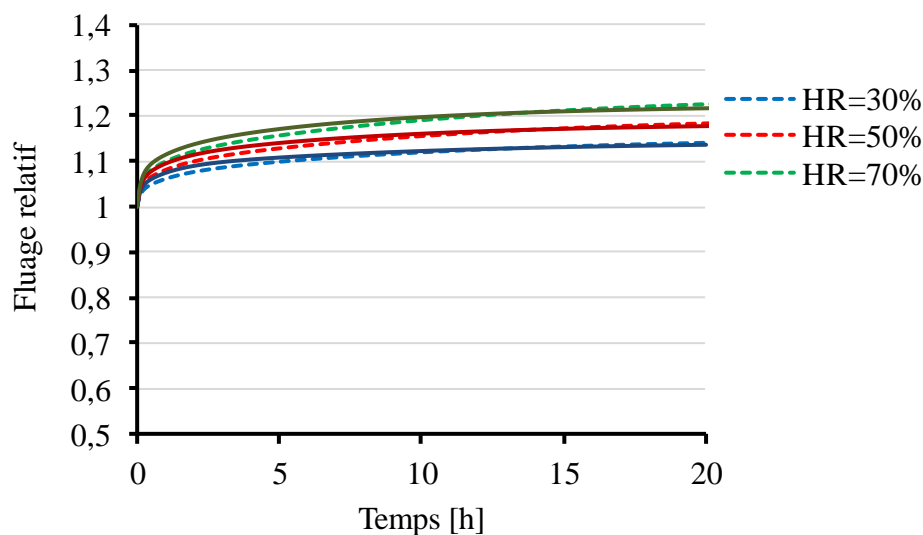


Figure 7-7 : Comparaison des courbes de fluage relatif déduites des essais (trait continu) et simulées (trait discontinu) pour différents taux d'humidité relative.

De manière plus générale, on compare sur les Figure 7-8 (a) et (b), les courbes de relaxation obtenues par la méthode de superposition de Boltzmann (Figure 5.5 (a)) à partir des courbes précédentes issues des essais, à celles déduites du calcul par formulation incrémentale pour une variation d'humidité relative correspondant à des cycles « sec » et « humide » (Figures 5.2 (b) et 5.3 (b)). On remarque sur les Figure 7-8 (a) et (b) que les courbes analytiques et les courbes simulées sont à nouveau très proches, ce qui valide la formulation incrémentale appliquée au cas de la relaxation à humidité variable. On en déduit que la formulation incrémentale permet de rendre compte correctement du comportement viscoélastique du matériau en présence de variation d'humidité relative.

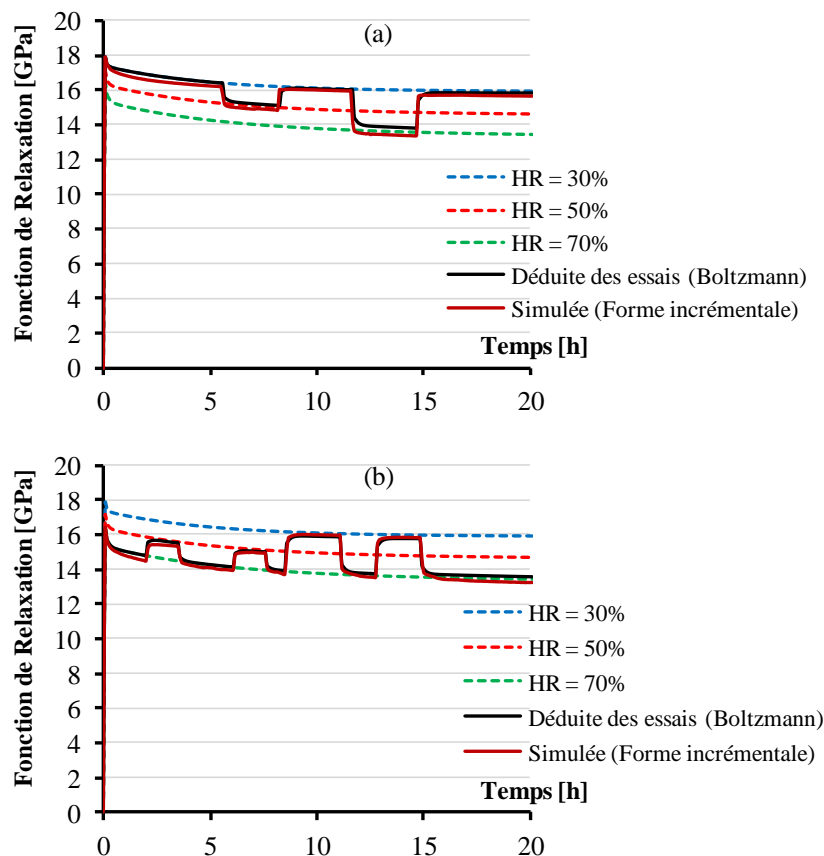


Figure 7-8 : Courbes de relaxation à humidité constante et variable pour un cycle : « sec » (a) ; « humide » (b).

En fait, les courbes issues des essais ayant fait l'objet d'un lissage par série de Dirichlet, et pour les dernières (humidité variable) d'un calcul basé sur le principe de superposition de Boltzmann – ce qui constitue aussi une base pour la formulation incrémentale – la bonne correspondance entre courbes simulées et courbes déduites des essais démontre essentiellement la validité de l'approximation linéaire de la déformation sur le pas de temps fini pour la construction de la formulation incrémentale.

Enfin, sur la Figure 7-9, on compare la déformation viscoélastique déduite de l'essai à contrainte et humidité variables en application du principe de superposition (somme de la Figure 5.13 (b) et de la Figure 5-14), avec celle calculée par la formulation incrémentale à paramètres variables (6.73).

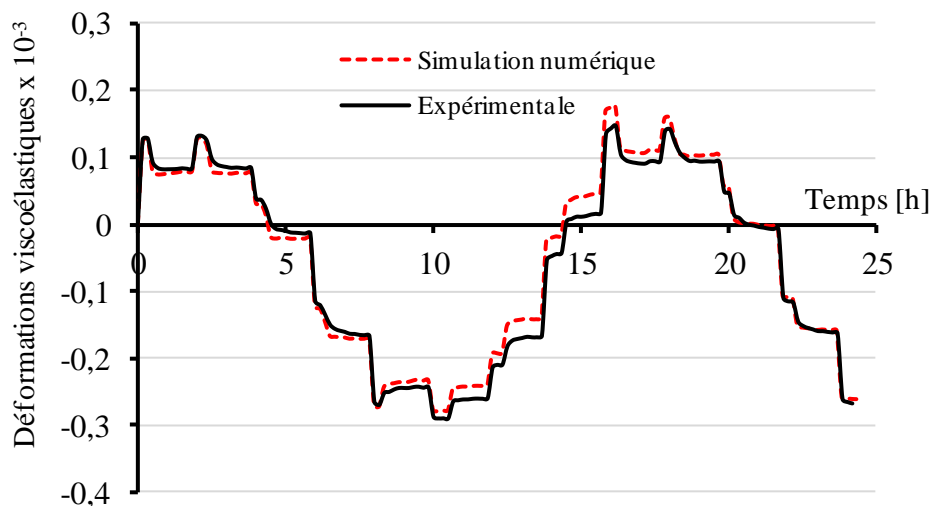


Figure 7-9 : Courbes des déformations viscoélastiques expérimentale (trait continu) et simulée (trait discontinu) pour l'essai en contrainte et humidité variables.

On constate que les deux courbes sont très rapprochées voir superposées sur certains intervalles. Ce résultat valide la formulation incrémentale à paramètres variables dans le cas d'un essai de fluage à chargement et humidité relative variables.

### 7.2.2 Simulation des contraintes de dessiccation dans une rondelle de bois vert

Ce paragraphe présente l'application de la formulation incrémentale à l'évolution de l'état de contrainte dans une rondelle de bois vert en prenant en compte les variations hygroscopiques au cours du séchage. On rappelle tout d'abord les données expérimentales sur lesquelles s'appuie l'exemple numérique proposé. Ensuite, on étend la formulation viscoélastique incrémentale au cas 3D pour un matériau orthotrope et on présente l'algorithme de résolution via le code de calcul aux éléments finis Cast3m. Les résultats numériques en termes d'évolution des contraintes, avec ou sans comportement viscoélastique, sont discutés afin d'évaluer l'efficacité du modèle proposé.

#### 7.2.2.1 Données expérimentales

Une rondelle en pin sylvestre d'environ 10 cm de diamètre et 4 cm d'épaisseur, est placée dans un environnement où la température et l'humidité relative sont maintenues constantes durant toute la durée de l'essai, Figure 7-10.

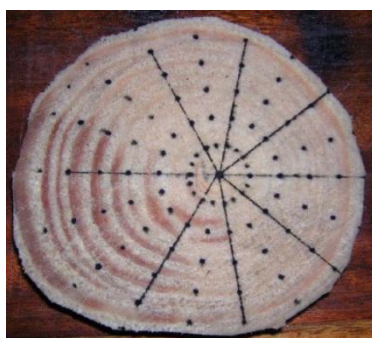


Figure 7-10 : Rondelle de bois vert [MOU 05].

La rondelle de bois vert, soumise au séchage naturel, est placée sur une balance à haute sensibilité dont les valeurs sont relevées toutes les deux heures jusqu'à la stabilisation pour une humidité interne d'environ 11% et un PSF d'environ 22%. La Figure 7-11, présente l'évolution dans le temps de la teneur en eau de la rondelle [MOU 05]. La plage de variation hygroscopique observée est de 14h.

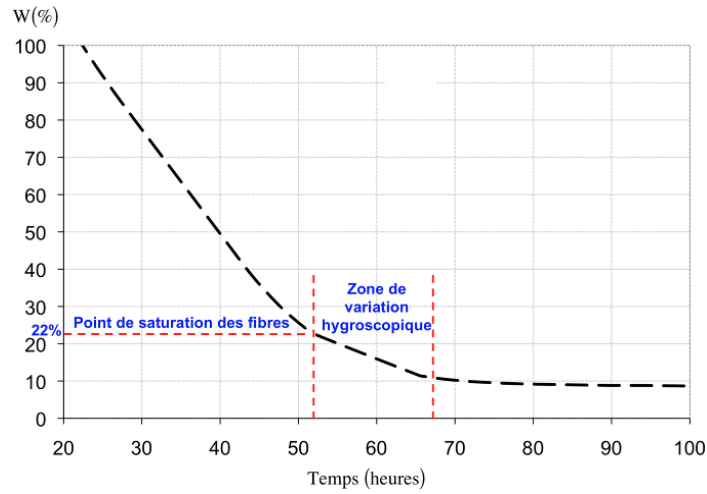


Figure 7-11 : Evolution de la teneur en eau en fonction du temps [MOU 05].

On rappelle que l'objectif du séchage est de diminuer le plus rapidement possible la teneur en humidité du bois tout en limitant les pertes éventuelles de qualité causées par des défauts existant dans le matériau bois. D'après la courbe typique du retrait hydrique du bois (Figure 1-7), il apparaît qu'au-dessus du point de saturation des fibres (PSF), le bois ne subit pas de variations dimensionnelles, contrairement à ce qui se produit au-dessous du PSF jusqu'à l'état anhydre, §1.1.2.3.

### 7.2.2.2 Formulation viscoélastique incrémentale

Similairement à l'équation (1.2), pour un matériau orthotrope, la matrice de relaxation viscoélastique  $[R(t, t_0)]$  dépend de neuf grandeurs indépendantes fonctions de  $t_0$  (instant d'application du chargement) et de  $t$  (temps actuel). Ce nombre se réduit à trois dans le cas bidimensionnel (contraintes planes) si le fluage ou la relaxation s'effectue à coefficient de Poisson constant. Moyennant l'hypothèse supplémentaire que ces grandeurs évoluent de manière proportionnelle à une même fonction de relaxation adimensionnelle  $\rho(t, t_0)$ , la matrice de relaxation viscoélastique s'écrit :

$$[R(t, t_0)] = \rho(t, t_0)[K_0] \quad (7.4)$$

Dans cette expression,  $[K_0]$  est la matrice de rigidité orthotrope élastique ;  $\rho(t, t_0)$  est une fonction adimensionnelle qui s'exprime sous la forme d'une série de Dirichlet (représentation spectrale équivalente à un modèle de Maxwell généralisé) :

$$\rho(t, t_0) = \gamma_0 + \sum_{\mu=1}^r \gamma_{\mu} e^{-\alpha_{\mu}(t-t_0)} \quad (7.5)$$

$$\text{Avec } \sum_{\mu=0}^r \gamma_{\mu} = 1 \quad \text{d'où } \rho(t, t_0) \in [1, \gamma_0[$$

La réponse en relaxation d'un matériau viscoélastique sollicité par une histoire de déformation quelconque est donnée par l'équation de Boltzmann

$$\{\sigma(t)\} = [K_0] \int_0^t \rho(t, \tau) \{\dot{\varepsilon}^m(\tau)\} d\tau \quad (7.6)$$

sachant que la déformation totale s'écrit à tout instant :

$$\{\varepsilon(\tau)\} = \{\varepsilon^m(\tau)\} + \{\varepsilon^*(\tau)\} \quad (7.7)$$

$\{\varepsilon^m(\tau)\}$  est la déformation d'origine mécanique viscoélastique et  $\{\varepsilon^*(\tau)\}$  est une déformation libre indépendante de l'état de contrainte du matériau (retrait hydrique).

Compte tenu de l'équation (7.6), l'incrément de contrainte  $\{\Delta\sigma\}$  pour un intervalle de temps fini  $[t, t + \Delta t]$  s'écrit

$$\{\Delta\sigma\} = [K_0] \left( \int_t^{t+\Delta t} \rho(t + \Delta t, \tau) \{\dot{\varepsilon}^m(\tau)\} d\tau + \int_0^t (\rho(t + \Delta t, \tau) - \rho(t, \tau)) \{\dot{\varepsilon}^m(\tau)\} d\tau \right) \quad (7.8)$$

On admet que  $\{\dot{\varepsilon}^m(\tau)\}$  peut être approché par une forme linéaire sur l'intervalle de temps fini  $[t, t + \Delta t]$

$$\{\dot{\varepsilon}^m(\tau)\} \cong \{\dot{\varepsilon}^m(t)\} + \frac{\tau - t}{\Delta t} \{\Delta\dot{\varepsilon}^m\} \rightarrow \{\dot{\varepsilon}^m(\tau)\} \cong \frac{\{\Delta\dot{\varepsilon}^m\}}{\Delta t} \quad (7.9)$$

Finalement, après avoir porté les équations (7.7) et (7.9) dans (7.8), la loi viscoélastique linéaire orthotrope prend la forme d'une équation matricielle incrémentale

$$\begin{aligned} \forall t, \Delta t : \{\Delta\sigma\} &= [\tilde{K}] \{\Delta\varepsilon\} + \{\sigma^{hist}(t)\} - \{\Delta\sigma^*\} \\ \text{avec : } [\tilde{K}] &= \left( \gamma_0 + \sum_{\mu=1}^r \tilde{\gamma}_\mu \right) [K_0] = \left( \gamma_0 + \sum_{\mu=1}^r \gamma_\mu \frac{1 - e^{-\alpha_\mu \Delta t}}{\alpha_\mu \Delta t} \right) [K_0] \\ \{\sigma^{hist}(t)\} &= \sum_{\mu=1}^r \{\sigma_\mu^{hist}(t)\} = - \sum_{\mu=1}^r (1 - e^{-\alpha_\mu \Delta t}) \{\sigma_\mu(t)\} \quad \text{et} \quad \{\Delta\sigma^*\} = [\tilde{K}] \{\Delta\varepsilon^*\} \end{aligned} \quad (7.10)$$

$[\tilde{K}]$  est une matrice de rigidité fictive.  $\{\sigma^{hist}(t)\}$  est un terme d'histoire qui résume l'effet des sollicitations passées depuis le premier chargement sur la réponse actuelle. Sa valeur dépend des paramètres  $\alpha_\mu, \gamma_\mu$  et du pas de temps  $\Delta t$  ; elle dépend également des variables internes  $\{\sigma_\mu(t)\}$  qui doivent être actualisées à la fin de chaque incrément de calcul :

$$\forall \mu \in [1, r] : \{\sigma_\mu(t + \Delta t)\} = \{\sigma_\mu(t)\} + [\tilde{K}_\mu] (\{\Delta\varepsilon\} - \{\Delta\varepsilon^*\}) + \{\sigma_\mu^{hist}(t)\} \quad (7.11)$$

$\{\Delta\varepsilon\}$  étant l'incrément de déformation pour le pas de temps écoulé.

### 7.2.2.3 Implémentation dans un code de calcul par éléments finis

Le modèle incrémental viscoélastique développé précédemment a été implémenté dans le code de calcul aux éléments finis Cast3m, selon l'organigramme décrit à la Figure 7-12.

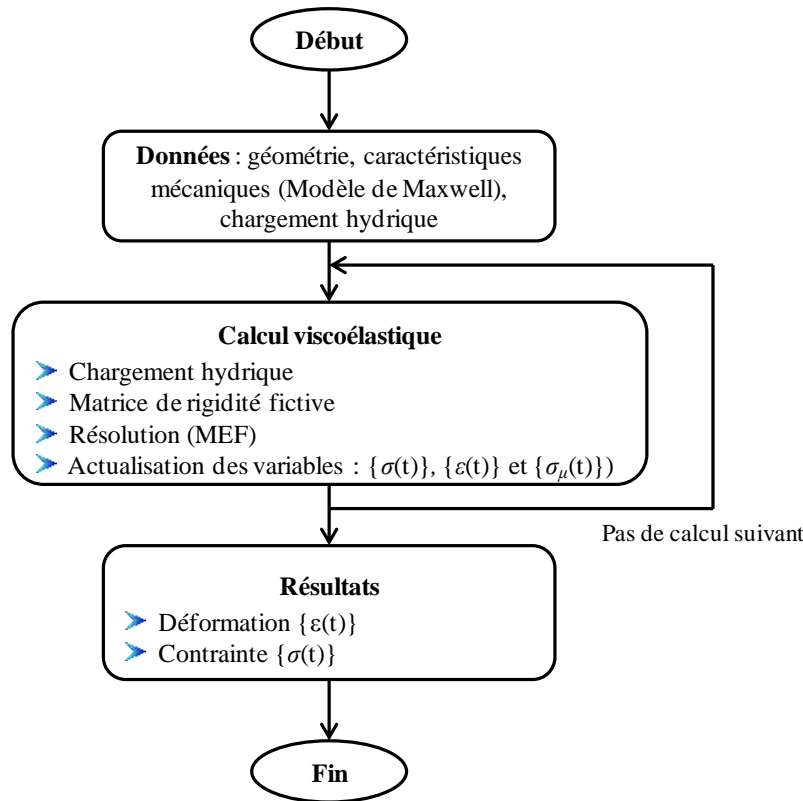


Figure 7-12 : Organigramme de résolution.

Chaque pas de calcul viscoélastique débute par le calcul de la matrice  $[\tilde{K}]$  et du terme d'histoire  $\{\sigma^{hist}(t)\}$ . Ensuite, ces données sont utilisées pour la résolution du problème thermo-élastique équivalent exprimé par l'équation (7.10). Le résultat de la résolution est finalement utilisé pour actualiser les contraintes internes conformément à l'équation (7.11) avant de passer au pas suivant.

### 7.2.2.4 Application à la rondelle de bois vert

La rondelle de bois vert (Figure 7-10) est modélisée à l'aide du code de calcul Cast3m. Compte tenu de sa faible épaisseur, on considère l'hypothèse de contraintes planes. La modélisation est faite sur la base de la formulation incrémentale (7.10), en considérant un modèle de Zener [SAI 13c]. Les trois modules d'élasticité ( $E_r$ ,  $E_t$  et  $G_{rt}$ ), le coefficient de Poisson ( $\nu_{rt}$ ), les coefficients de retrait radial et tangentiel ( $\alpha_r$  et  $\alpha_t$ ) et les paramètres de la fonction de relaxation adimensionnelle  $\rho(t_0, t)$  sont présentés dans le tableau ci-dessous :

$E_r$ (GPa)	$E_t$ (GPa)	$G_{rt}$ (GPa)	$\nu_{rt}$	$\alpha_r$	$\alpha_t$	$\gamma_0$	$\gamma_1$	$\alpha_1$ (h <sup>-1</sup> )
1.125	0.730	0.096	0.3	0.17	0.31	0.75	0.25	0.5

Tableau 7-1 : Paramètres du modèle incrémental.

La simulation numérique donne l'évolution des contraintes au cours du séchage dues au développement des retraits contrariés par l'anisotropie du bois (matériau orthotrope et coefficients de retrait hydrique).

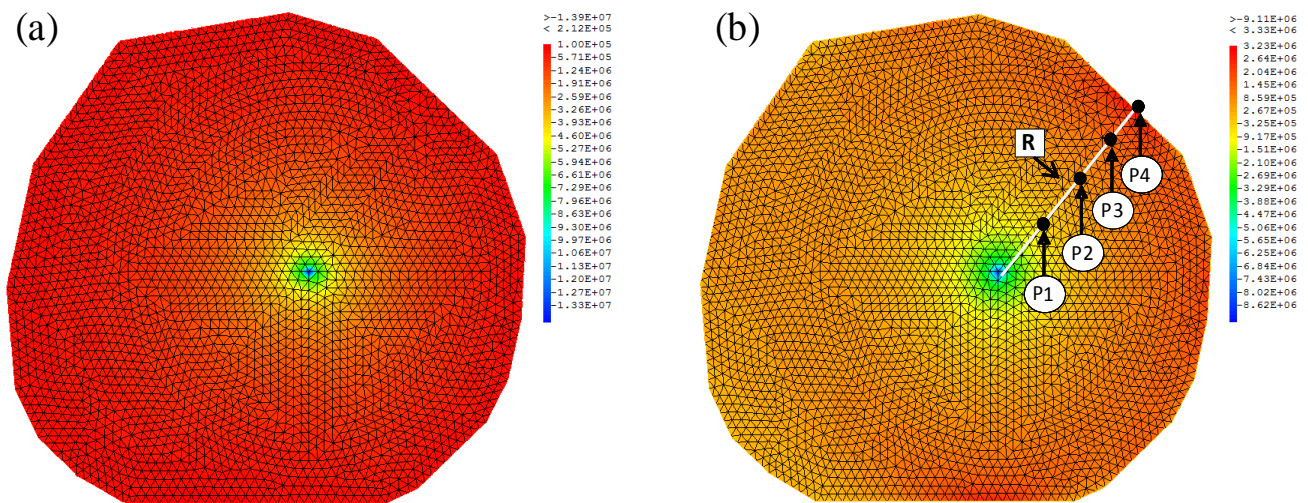


Figure 7-13 : Répartition des contraintes à  $t = 14h$  : contraintes radiales (a) ; contraintes circonférentielles (b).

L'analyse des contraintes montre que la rondelle est quasiment partout comprimée dans la direction radiale (Figure 7-13 (a)). Dans la direction circonférentielle (Figure 7-13 (b)) les contraintes changent de signe : on observe des contraintes de traction à la périphérie et de compression lorsqu'on s'approche du centre. On constate aussi l'existence de deux zones de concentration de contraintes circonférentielles de traction à cause de la dissymétrie de la rondelle. Pour la suite, on s'intéresse à l'évolution des contraintes circonférentielles sur le rayon R qui relie le centre de la rondelle au point P4 où la contrainte circonférentielle de traction est maximale.

La Figure 7-14 (a), montre que la contrainte circonférentielle se développe de manière auto-équilibrée le long du rayon R, la zone comprimée au centre équilibrant la zone tendue à la périphérie. Les Figures 7-14 (a) et (b) montrent également que les contraintes augmentent au cours du temps avec le développement du retrait hydrique jusqu'à  $t = 14h$ . Au-delà, le retrait se stabilise et les contraintes diminuent par effet de relaxation (Figure 7-14 (b)). La comparaison entre calculs élastique et viscoélastique montre que le calcul élastique surestime les contraintes. Dans le cas viscoélastique, le développement des contraintes s'effectue avec retard et de manière plus modérée que dans le cas élastique.



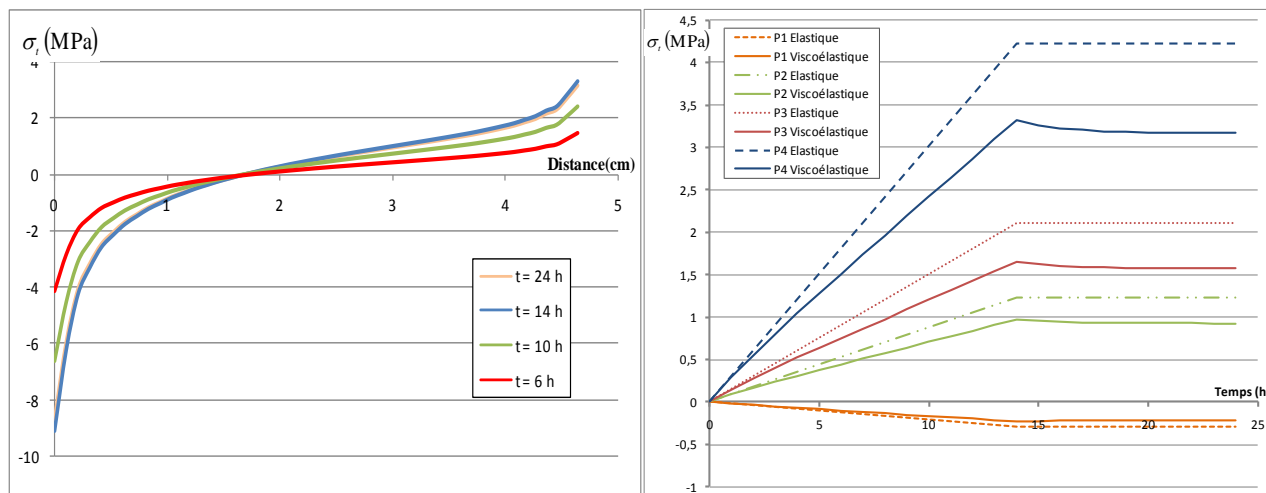


Figure 7-14 : Distribution de la contrainte circonférentielle le long du rayon  $R$  (a) ; évolution de la contrainte circonférentielle aux points P1 à P4 (solutions élastique et viscoélastique) (b)

En résumé, le modèle développé ici a été appliqué à la simulation des contraintes de dessiccation dans une rondelle de bois vert soumise au séchage naturel. On constate l'apparition de contraintes dues au retrait et à l'orthotropie du bois. La combinaison des effets de retrait hydrique avec la viscoélasticité du bois donne des contraintes inférieures à celles obtenues par un calcul élastique. Des contraintes de traction sont observées selon la direction circonférentielle lorsqu'on s'éloigne du cœur de la rondelle, les valeurs maximales étant atteintes à sa périphérie. Ces contraintes peuvent conduire à une fissuration radiale fréquemment observée en phase de séchage. La caractérisation et l'étude du comportement hydro-viscoélastique du bois sont indispensables pour mieux prédire son comportement et éviter le risque de fissuration au cours du processus de séchage.

### 7.3 Simulation du comportement viscoélastique mécanosorptif

Ce dernier paragraphe concerne la validation numérique du modèle viscoélastique mécanosorptif proposé au paragraphe 6.2.4.3 par comparaison aux résultats expérimentaux obtenus sous humidité variable, dans le cas d'un chargement constant (§5.2) puis dans celui d'un chargement variable (§5.3).

#### 7.3.1 Chargement constant et humidité variable

On applique le modèle hygroverrou établi en formulation incrémentale développé au chapitre 6, équation (6.84) au cas d'une déformation imposée constante pour deux cycles de variation d'humidité relative vu dans le chapitre 5 (Figures 5.2 (c) et 5.3 (c)). Dans cette simulation, on utilise les paramètres identifiés à partir des essais préliminaires dans le § 4.3.3.

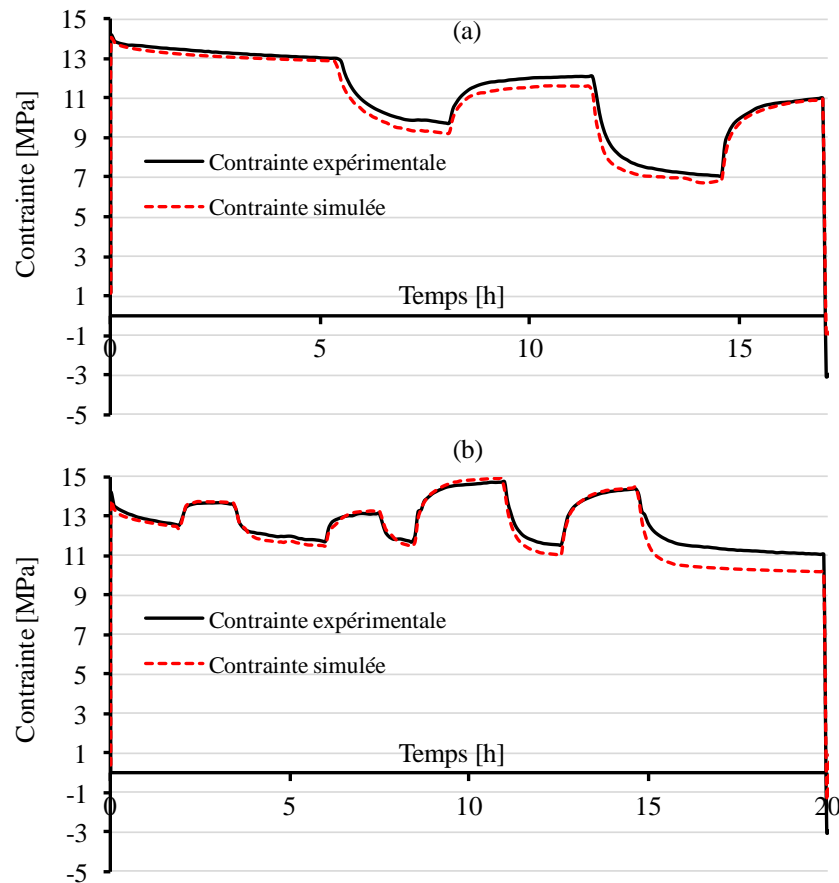


Figure 7-15 : Courbes de relaxation analytiques et expérimentales pour : cycle sec (a) ; cycle humide (b).

La Figure 7-15 présente l'évolution des courbes de relaxation en fonction du temps pour le cycle « sec » (a) et « humide » (b). Les courbes simulées sont tracées en trait discontinu et les courbes expérimentales en trait continu. On remarque dans les deux cas, que les courbes sont très proches voire superposées sur certains intervalles, ce qui valide l'approche hygroverrou viscoélastique incrémentale en relaxation.

### 7.3.2 Chargement et humidité variables

Pour compléter la validation, on se propose d'appliquer la formulation incrémentale du modèle viscoélastique mécanosorptif à la simulation de l'essai final sous chargement et humidité variables.

La Figure 7-16 présente l'évolution en fonction du temps de la déformation totale mesurée lors de l'essai, de la déformation reconstruite à partir de l'analyse du résultat de l'essai et de la déformation simulée à l'aide du modèle. On rappelle que les deux premières courbes (déformation expérimentale et reconstruite) ont été déjà présentées à la figure 5.18.

La comparaison montre que la courbe simulée présente la même allure que les deux autres courbes. Elle est plus proche de la courbe reconstruite que de la courbe expérimentale, ce qui peut s'expliquer par le fait que les hypothèses de base de la formulation incrémentale sont les mêmes que celles utilisées pour reconstruire la courbe à partir de l'analyse de la courbe expérimentale. Ce résultat confirme la validité du modèle incrémental et sa capacité à simuler un essai en fluage pour des variations de chargement et d'humidité relative quelconques.

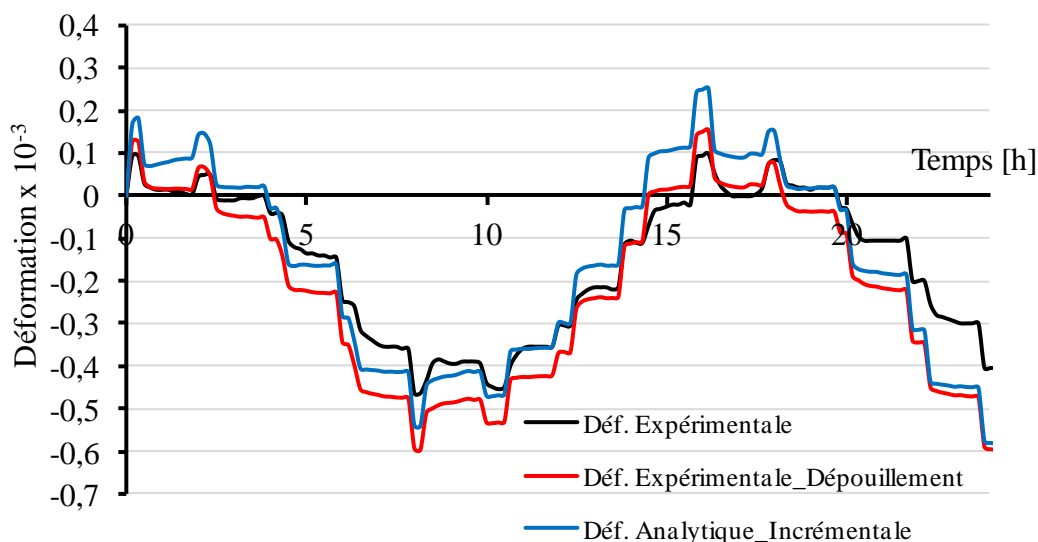


Figure 7-16 : Courbes expérimentale, reconstruite et simulée de la déformation totale au cours de l'essai mécanosorptif à humidité relative et contrainte cycliques

## 7.4 Conclusion

Dans ce chapitre, les modèles numériques pseudo-élastiques exprimés en rigidité et en complaisance ont été appliqués à un chargement par paliers. Cet exemple a montré l'équivalence des deux approches. Ensuite, un chargement cyclique à différentes valeurs d'amplitudes et de déphasage a été simulé, ce qui a permis de montrer l'influence de l'angle de déphasage sur l'évolution de la déformation hygroverrou. La formulation viscoélastique incrémentale a ensuite été validée sous humidité constante et variable par comparaison aux résultats issus de l'application du principe de superposition de Boltzmann pour des résultats expérimentaux. Après une généralisation au cas 3D orthotrope, le modèle viscoélastique incrémental a été appliqué à la simulation d'une rondelle de bois vert en cours de séchage. Enfin, le modèle viscoélastique mécanosorptif a été validé par comparaison aux résultats expérimentaux en relaxation sous déplacement imposé constant et humidité relative variable et en fluage sous contrainte et humidité relative variables.

## CONCLUSION

Le thème général de la thèse concerne l'étude du comportement hydromécanique du bois – ou comportement « mécanosorptif » – et de sa modélisation sous les effets combinés de la sollicitation mécanique et des variations d'humidité. D'autres paramètres comme la température ou l'endommagement, bien qu'influant également sur le comportement du bois, n'ont pas été pris en considération dans le présent travail.

### *La mécanosorption dans la littérature*

Dans un premier temps, nous avons passé en revue les divers aspects du comportement du bois qui dépend fortement de son état hydrique, mais aussi de divers paramètres mécaniques ainsi que du niveau et de l'histoire du chargement en relation avec les variations de teneur en eau. Les données expérimentales disponibles montrent que le comportement mécanosorptif présente un double aspect. D'une part, il correspond à un phénomène d'amplification de la déformation de fluage provoqué par les cycles d'humidité jusqu'à une valeur limite. D'autre part, il intègre un effet « hygroverrou » qui correspond à un blocage temporaire de la déformation lors du séchage. Cette déformation bloquée est ensuite récupérée en phase d'humidification. On dispose d'une assez grande variété de modèles pour la représentation du comportement mécanosorptif. Parmi les modèles les plus pertinents, on peut citer celui proposé par Husson, basé sur l'hypothèse de partition de déformation à activation combinée. Ce modèle qui prend en compte l'effet hygroverrou, s'applique quelque soit la variation de chargement ou de teneur en eau. On a ensuite examiné les avancées récentes relatives à la modélisation du comportement viscoélastique du bois sous conditions climatiques stables. A travers cette approche bibliographique, il apparaît que la formulation basée sur le modèle de Maxwell généralisé est la plus simple à utiliser dans un objectif de formulation incrémentale et de simulation numérique.

L'étude bibliographique préliminaire a montré le peu de données expérimentales disponibles sur l'effet hygroverrou. Une bonne connaissance de ce phénomène est pourtant nécessaire pour élaborer un modèle fiable de comportement hydromécanique du bois sous chargement et humidité variable. Dans ce contexte, nous avons donc choisi d'axer notre travail sur une double approche expérimentale et de modélisation de ce phénomène, en interaction avec les autres aspects du comportement hydromécanique du bois. Ainsi, une étude expérimentale a été spécialement menée qui visait à mettre en évidence l'effet hygroverrou et à identifier les mécanismes qui régissent son évolution en fonction des variations de contrainte et d'humidité. Les conclusions de ces essais ont ensuite servi de base pour l'élaboration d'un modèle analytique et numérique qui prend en compte les principaux aspects du comportement hydromécanique du bois. Les principales conclusions relatives aux deux volets de ce travail sont rassemblées dans ce qui suit.

### *L'étude expérimentale*

Nous avons réalisé une série d'essais mécanosorptifs à l'Institut des Matériaux et de la Technologie du Bois de la Haute École Spécialisée Bernoise (Bern University of Applied Sciences) à Bienne (Suisse) dans le cadre d'une STSM (Short term scientific mission) de l'action COST FP0904. L'essence étudiée était le sapin blanc (*abies alba Mill.*), choisi pour l'intérêt qu'il suscite actuellement dans le Massif central, compte tenu des potentialités qu'il présente du fait de son abondance et de sa sous-exploitation. Vu la complexité des essais à réaliser dans un temps limité, nous avons choisi de centrer l'étude expérimentale sur l'effet hygroverrou sans tenir compte des autres effets mécanosorptifs. Les essais réalisés visaient un triple objectif : d'une part, identifier et

déterminer les principaux paramètres qui régissent le comportement hydromécanique du sapin blanc ; d'autre part, mettre en évidence l'existence d'une déformation hygroverrou au moyen d'essais de fluage et de relaxation à humidité variable ; enfin, voir dans quelle mesure la déformation hygroverrou suffit à expliquer la totalité des effets mécanosorptifs observés. Tous les essais ont été réalisés sur des échantillons de petites dimensions, à l'aide d'une machine spécifique de traction-compression équipée d'une cellule hygrothermique contrôlée en humidité et température.

Nous avons effectué dans un premier temps des essais préliminaires de caractérisation hydrique et mécanique. Les résultats ont mis en évidence la bonne résistance mécanique à la traction (115 MPa environ), légèrement supérieure aux valeurs généralement rapportées dans la littérature pour cette essence. Une relation linéaire entre le module d'élasticité et l'humidité relative a également été mise en évidence, en accord avec les données bibliographiques. Une série d'essais en fluage/recouvrance ou relaxation/effacement à humidité constante ont ensuite été réalisés. Ces essais ont permis de déterminer les fonctions de fluage et de relaxation en fonction de l'humidité. Ils ont également permis d'établir la linéarité du comportement viscoélastique vis-à-vis de la contrainte ou de la déformation imposée jusqu'à 17% environ de la contrainte à rupture. Ils ont enfin permis d'établir la linéarité du comportement viscoélastique vis-à-vis du taux d'humidité entre 30% et 70% d'humidité relative. Sur cette base, en s'appuyant sur des représentations analogiques sous la forme d'un modèle de Kelvin ou d'un modèle de Maxwell généralisé respectivement, il s'est finalement avéré possible d'exprimer la fonction de fluage et la fonction de relaxation sous la forme de deux séries de Dirichlet en fonction du taux d'humidité relative. Les paramètres de ces lois ont pu être déduits des résultats d'essais par une méthode d'identification basée sur la méthode des moindres carrés.

Nous avons ensuite réalisé deux essais mécanosorptifs en relaxation sous humidité variable. La comparaison des résultats à ceux obtenus précédemment sous humidité constante, a permis de mettre en évidence une différence de comportement pouvant être attribué à l'existence d'un effet mécanosorptif. Une analyse des résultats sur la base de l'hypothèse de la partition de la contrainte totale en une part hydrique, une part viscoélastique et une part mécanosorptive, a permis de montrer l'existence d'une contrainte hygroverrou dans les deux cas. Cette contrainte apparaît lors d'un séchage sous contrainte. Elle persiste jusqu'à ce que l'humidité relative revienne à sa valeur initiale au début du cycle de séchage/humidification. Il faut noter cependant que, dans le cas d'un essai de relaxation, les effets sont fortement imbriqués, contrairement au cas d'un essai de fluage pour lequel l'effet mécanosorptif peut être facilement isolé des autres aspects du comportement hydromécanique.

L'étude expérimentale s'est terminée par la réalisation d'un essai mécanosorptif en fluage dans lequel la contrainte et l'humidité relative variaient chacune par paliers selon une enveloppe sinusoïdale sur une période de 24 heures. Les deux cycles étaient décalés dans le temps, de manière à bien différencier les effets de la variation de la contrainte d'une part, de ceux de la variation de l'humidité relative d'autre part. L'interprétation de l'évolution de la déformation totale mesurée au cours de l'essai a pu être menée sur la base de l'hypothèse de partition de la déformation, à partir des paramètres issus des essais préliminaires. La part viscoélastique de la déformation a été évaluée sur la base du principe de superposition de Boltzmann appliqué aux variations de la contrainte et de l'humidité relative. En décomposant ainsi la déformation totale, il s'est avéré possible de mettre en évidence l'existence d'une déformation hygroverrou qui se développe lors des phases de séchage sous contrainte, pour se résorber lors des phases d'humidification. L'évolution de cette déformation hygroverrou tend à compenser la variation de déformation élastique due à la rigidification du matériau bois en phase de séchage. Il existe cependant un écart entre l'évolution déduite de cette hypothèse et le résultat d'essai, ce qui permet de penser que l'effet mécanosorptif ne se réduit pas à la seule déformation hygroverrou, mais qu'il est sans doute complété par un fluage mécanosorptif analogue à celui proposé par Ranta-Maunus ou Salin par exemple. Malheureusement, la trop courte durée de l'essai (1,5 cycle) n'a pas permis de trancher cette question.

### *Le modèle de comportement*

Après avoir rappelé le cadre thermodynamique pour la formulation d'un modèle de comportement hygroverrou, nous avons proposé un premier modèle pseudo élastique formulé en rigidité, basé sur la loi de Hooke en humidification et la loi de Bazant en séchage. Ce modèle élémentaire a permis de bien poser les bases pour la formulation de la contrainte hygroverrou en fonction de l'évolution de la sollicitation mécanique et de l'humidité. Dans ce modèle, l'effet hygroverrou est piloté par la teneur en eau, en référence à une valeur seuil correspondant au début de la phase de séchage sous contrainte. Cette relation sera utilisée ensuite pour la construction de la loi de comportement avec hygroverrou.

Dans un second temps, plusieurs modèles rhéologiques analogiques ont été proposés comme supports à l'élaboration d'un modèle de comportement intégrant la déformation hydrique, le comportement viscoélastique et l'effet hygroverrou. Trois familles de modèles rhéologiques ont ainsi été proposées et classées en fonction du principe de partition de la déformation ou de la contrainte. Sur cette base, plusieurs modèles analytiques élémentaires ont été développés, pour être assemblés ensuite sous la forme de modèles en série ou en parallèle. Ces modèles ont été discrétisés de manière à les mettre sous une forme incrémentale. En procédant de manière progressive, il a été possible de bâtir finalement un modèle incrémental à « grand » pas de temps. Ce modèle est en effet construit par intégration de la forme différentielle de la loi de comportement pour un pas de temps fini. Il en résulte que sa mise en œuvre numérique ne requiert qu'un nombre limité de pas de calcul pour une très bonne précision, le pas de temps étant fini mais non nécessairement petit.

La validation du modèle ainsi élaboré a tout d'abord consisté à vérifier l'équivalence de l'approche pseudo-élastique en rigidité avec celle en complaisance au travers d'un exemple académique. Dans un second temps, la pertinence du modèle viscoélastique incrémental sous humidité constante ou variable a été vérifiée par comparaison à des courbes de références déduites des résultats expérimentaux. Un exemple d'application du modèle viscoélastique incrémental pour l'analyse des contraintes de dessiccation dans une rondelle de bois vert a également été traité après généralisation du modèle en 3D orthotrope. Enfin, le modèle viscoélastique mécanosorptif complet a été appliqué à la simulation des essais mécanosorptif en relaxation sous humidité variable et de l'essai mécanosorptif final de fluage sous contrainte et humidité variables. La très bonne correspondance entre les résultats des calculs et les courbes expérimentales valide la pertinence du modèle. Là encore, le léger écart observé entre les résultats des simulations et les résultats des essais semble indiquer que le modèle n'explique pas la totalité du comportement qui présente sans doute un aspect mécanosorptif en plus de l'effet hygroverrou.

Au final, ce travail propose une avancée dans la compréhension et la modélisation des aspects mécanosorptifs dans le comportement du bois sous contrainte et humidité variables. Il souligne aussi les difficultés rencontrées et la limite des essais réalisés pour la mise en évidence des effets mécanosorptifs sur des échantillons de faibles dimensions. En particulier, il apparaît nécessaire de prolonger l'approche expérimentale de manière à mieux situer le phénomène hygroverrou dans le contexte général du comportement mécanosorptif. Il apparaît également indispensable d'étendre ces approches expérimentales pour tenter d'obtenir des informations fiables sur l'aspect 3D du comportement hygroverrou, et plus généralement du comportement mécanosorptif, informations absentes de la littérature à ce jour. Cette connaissance est en effet indispensable pour développer les modèles numériques tridimensionnels nécessaires pour la simulation des états mécaniques dans les objets ou les éléments en bois (éléments de construction par exemple) soumis à des états de sollicitation et d'humidité variables.



## BIBLIOGRAPHIE

- [ARM 60] **Armstrong, L.D., Kingston, R.S.T. 1960.** Effect of moisture changes on creep in wood. *Nature*. 1960, Vol. 185 (4716), pp. 862-863.
- [ARM 61] **Armstrong, L.D., Christensen, G.N. 1961.** Influence of moisture changes on deformation of wood under stress. *Nature*. 1961, Vol. 191, pp. 869-870.
- [ARM 62] **Armstrong, L., Kingston, R.S.T. 1962.** The effect of moisture content changes on the deformation of wood under stress. *Australian Journal of Applied Science*. 1962, Vol. 13(4), pp. 257-276.
- [ARM 72] **Armstrong, L.D., Grossman, P.U.A. 1972.** The behaviour of particle board and hardboard beams during moisture cycling. *Wood Sci. Technol.* 1972, Vol. 6, pp. 128-137.
- [BAR 01] **Bardet, S. 2001.** Comportement thermoviscoélastique transverse du bois humide. Université de Montpellier II. 2001, Thèse de Doctorat.
- [BAZ 67] **Bazant, Z.P. 1967.** Linear creep problems solved by a seccession of generalized thermoelasticity problem. *Acta Tech. Csav (Prag)* 1967, Vol 5, pp. 581-594.
- [BAZ 72] **Bazant, Z.P. 1972.** Numerical determination of long-range stress history from strain history in concrete. *Mat. et Const.* 1972, Vol. 5 (27), pp. 135-141.
- [BAZ 73] **Bazant, Z.P., Najjar, L.J. 1973.** Comparison of approximate linear methods for concrete creep. *Journal of the Structural Division*. 1973, Vol. 99, pp. 1851-1874.
- [BAZ 73a] **Bazant, Z.P. 1973.** Dirichlet series creep fonction for aging concrete. *Journal of the engineering mechanics division*. 1973, Vol. 99, pp. 367-387.
- [BAZ 74] **Bazant, Z.P., Wu, S.T. 1974.** Rate-type creep low of aging concrete based on Maxwell chain. *Matériaux et Constructions*. 1974, Vol. 7 (37), pp. 45-60.
- [BAZ 75] **Bazant, Z.P. 1975.** Theory of creep and shrinkage in concrete structures : A precis of recent decelopments. *Mechanics Today*. 1975, Vol. 2, pp. 1-93.
- [BAZ 79] **Bazant, Z.P. 1979.** Thermodynamics of solidifying or melting viscoelastic material. *Journal of the Eng. Mechanics Division*. 1979, Vol. 105 (6), pp. 933-952.
- [BAZ 85] **Bazant, Z.P. 1985.** Constitutive equation of wood at variable humidity and temperature. *Wood Sci. Technol.* 1985, Vol. 19, pp. 159-177.
- [BER 03] **Berthollet, A. 2003.** Modélisation du mécanisme de fluage tertiaire par observation de l'effet de vitesse sur le comportement du béton. AUGC, 2-3 Juin La Rochelle. 2003, pp. 31-38.



- [BIG 11] Birgorgne, L., Brunet, M., Maigre, H., Simon, P., Chaudet, P. 2011. Softwood fracture characterisation at the mesoscopic scale. *Procedia Engineering*. 2011, Vol. 10, pp. 2707-2712.
- [BOD 93] Bodig, J., Jayne, B.A. 1993. *Mechanics of Wood and Wood Composites*. Krieger Publishing Company, Malabar (Florida). 1993, p. 712.
- [BOU 03] Bou Saïd, E. 2003. Contribution à la modélisation des effets différés du bois et du béton sous conditions climatiques variables. Application aux structures mixtes bois-béton. INSA de Lyon. 2003, Thèse de Doctorat.
- [CAR 87] Cariou, J.L. 1987. Caractérisation d'un matériau viscoélastique anisotrope : le bois. Université de Bordeaux 1. 1987, Thèse de Doctorat.
- [CHA 06] Chassagne, P. 2006. Contribution à la prédiction des conséquences mécaniques des phénomènes thermo-hydriques couplés : Application au bois. INSA de Lyon. 2006, Thèse de Doctorat.
- [CHA 11] Chazal, C., Moutou Pitti, R. 2011. Incremental constitutive formulation for time dependent materials: creep integral approach. *Mech Time-depend Mater*. 2011, Vol. 15(3), pp. 239-253.
- [COU 11] Coutand, C., Mathias, J.D., Jeronimidis, G., Destrebecq, J.F. 2011. TWIG: A model to simulate the gravitropic response of a tree axis in the frame of elasticity and viscoelasticity, at intra-annual time scale. *J. Theor. Biology*. 2011, Vol. 273, pp. 115-129.
- [DES 86] Destrebecq, J.F., Dyduch, K. 1986. Equilibre interne et ouverture des fissures des poutres en béton armé dans le temps. *Materials and Structures*. 1986, Vol. 19(2), pp.123-130.
- [DES 96] Destrebecq, J.F. 1996. Mécanique des matériaux solides déformables. Université Blaise Pascal, Clermont - Ferrand. Cours DEA. 1996.
- [DIN 81] Dinwoodie, J.M. 1981. *Timber, its nature and behavior*. Van Nostrand Reinhold (London), 1981.
- [DUB 04] Dubois, F. 2004. Modélisations numériques des comportements viscoélastiques. Université de Limoges. 2004. Thèse d'Habilitation à Diriger des Recherches.
- [DUB 05] Dubois, F., Randriambololona, H., Petit, C. 2005. Creep in wood under variable climate conditions: Numerical modeling and experimental validation. *Mech. of Time-Dependent Materials*. 2005, Vol. 9, pp. 173-202.
- [DUB 12] Dubois, F., Husson J.M., Sauvat, N., Manfoumbi, N. Modeling of the viscoelastic mechano-sorptive behavior in wood. *Mech Time-Depend Mater*. 2012, Vol. 16(4), pp. 439-460.

- [DUL 98] **Dulbecco, P., Luro, D. 1998.** L'essentiel sur le bois. Edition Centre Technique du Bois et de l'Ameublement (CTBA). 1998, p. 184.
- [FAI 94] **Fairbairn, E.M.R. 1994.** L'expérience Brésilienne dans l'utilisation du modèle rhéologique de la chaîne de Maxwell pour la résolution du problème thermo-mécanique des barrages en béton. Annales de l'ITBTP. 1994, Vol. 520, pp. 150-179.
- [FRA 06] **Fragiacomo, M. 2006.** Long-term behavior of timber-concrete composite beams. II : Numerical analysis and simplified evaluation. J. Struct Eng. 2006. Vol. 132, pp. 23-33.
- [FRO 12] **Froidevaux, J. 2012.** Wood and paint layers aging and risk analysis of ancient panel painting. Université de Montpellier II. 2012, Thèse de Doctorat.
- [GER 82] **Gerhards, C.C. 1982.** Effect of moisture content and temperature on the mechanical properties of wood : an analysis of immediate effects. Wood and Fiber. 1982, Vol. 14(1), pp. 4-36.
- [GHA 95] **Ghazlan, G., Caperaa, S., Petit, C. 1995.** An incremental formulation for the linear analysis of thin viscoelastic structures using generalized variables. International journal of numerical methods engineering. 1995, Vol. 38, pp. 3315-3333.
- [GOU 68] **Goulet, M., Ouellet, E. 1968.** Effet de la teneur en humidité du bois sur sa résistance à la traction transversale. Université Laval., Département d'Exploitation et Utilisation des Bois. 1968, p. 17, Notes de Recherches N° 1.
- [GRE 10] **Green, D.W., Winandy, J.E., Kretschmann, D.E. 2010.** "Mechanical properties of wood", extrait de "Wood handbook - Wood as an engineering material", Chapitre 4 : Mechanical properties of wood. US Department of Agriculture, Forest Products Laboratory. 2010.
- [GRI 88] **Gril, J. 1988.** Une modélisation du comportement hygro-rhéologique du bois à partir de sa microstructure. Université Paris 6. 1988, Thèse de Doctorat.
- [GUI 87] **Guitard, D. 1987.** Mécanique du matériau bois et composites. Cepadues-Editions (Toulouse). 1987, p. 238.
- [HAN 95] **Hanhijärvi, A. 1995.** Deformation kinetics based rheological model for the time-dependent and moisture induced deformation of wood. Wood Sci. Technol. 1995, Vol. 29, pp. 191-199.
- [HEA 64] **Hearmon, R.F.S., Paton, J.M. 1964.** Moisture content changes and creep of wood. Forest Products Journal. 1964, Vol. 14 (8), pp. 357-359.

- [HUN 84] **Hunt, D. G. 1984.** Creep trajectories for beech during moisture changes under load. *Journal of Materials Science*. 1984, Vol. 19(5), pp. 1456–1467.
- [HUN 87] **Hunt, D.G., Shelton, C.F. 1987.** Progress in the analysis of creep in wood during concurrent moisture changes. *J. of Mat. Science*. 1987, Vol. 22, pp. 313-320.
- [HUN 87a] **Hunt, D.G., Shelton, C.F. 1987.** Stable-state creep limit of softwood. *Journal of Materials Science Letters*. 1987, Vol. 6, pp. 353-354.
- [HUN 88] **Hunt, D.G., Shelton, C.F. 1988.** Longitudinal moisture-shrinkage coefficients of softwood at the mechano-sorptive creep limit. *Wood Sci. Technol.* 1988, Vol. 22, pp. 199-210.
- [HUN 89] **Hunt, D.G. 1989.** Linearity and non-linearity in mechano-sorptive creep of softwood in compression and bending. *Wood Sci. Technol.* 1989, Vol. 23, pp. 323-333.
- [HUN 92] **Hunt, D.G. 1992.** Present knowledge of mechano-sorptive creep of wood. *Creep in Timber Constructions*, Rilem Technical Committee. 1992, pp. 75-104.
- [HUN 96] **Hunt, D.G., Gril, J. 1996.** Evidence of a physical ageing phenomenon in wood. *Journal of Materials Science Letters*. 1996, Vol. 15, pp. 80-82.
- [HUS 09] **Husson, J.M. 2009.** Loi de comportement viscoélastique avec effet de mémoire-application à la mécanosorption dans le bois. Université de Limoges. 2009. Thèse de Doctorat.
- [HUS 10] **Husson, J.M., Dubois, F., Sauvat, N. 2010.** Elastic response in wood under moisture content variations : analytic development. *Mech Time-Depend Mater.* 2010, Vol. 14, pp. 203–217.
- [HUS 11] **Husson, J.M., Dubois, F., Sauvat, N. 2011.** A finite element model for shape memory behavior. *Mech Time-Depend Mater.* 2011, Vol. 15, pp. 213–237.
- [JUR 96] **Jurkiewicz, B. 1996.** Analyse et modélisation du comportement différé des ouvrages constitués de plusieurs matériaux. Université Blaise Pascal – Clermont-Ferrand, 1996, Thèse de Doctorat.
- [JUR 99] **Jurkiewicz, B., Destrebecq, J.F., Vergne, A. 1999.** Incremental analysis of time-dependent effects in composite structures. *Computer and Structructure*. 1999, Vol. 73, pp. 425-435.
- [JUR 00] **Jurkiewicz, B., Gwozdziwicz, P., Destrebecq, J.F. 2000.** Application of the FEM to the time analysis of concrete structures. *Nordic Concrete Research*, Nordic Concrete Federation. 2000, Vol. 23, pp. 180 à 182.

- [KIN 61] **Kingston, R.S.T., Clarke, L.N. 1961.** Some aspects of the rheological behaviour of wood : The effect of stress with particular reference to creep. Wood Sci. Technol. 1961, Vol. 6, 211–226.
- [KOL 68] **Kollmann, F.F.P., Côte, W.A. 1968.** Principles of Wood Science and Technology Vol. 1: Solid Wood, Springer-Verlag. 1968. p. 592.
- [LEI 71] **Leicester, R.H. 1971.** A Rheological model for mechano-sorptive deflections of beams. Wood Sci. Technol. 1971, Vol. 5, pp. 211-220.
- [LEM 09] **Lemaitre, J., Chaboche, J.L. 2009.** Mécanique des matériaux solides. Dunod (Paris), 2009.
- [MAN 66] **Mandel, J. 1966.** Cours de mécanique des milieux continus-Tome II. Gauthier Villars (Paris), 1966.
- [MAR 88] **Mårtensson, A., Sweden, L. 1988.** Tensile behaviour of hardboard under combined mechanical and moisture loading. Wood Sci. Technol. 1988, Vol. 22, pp. 129-142.
- [MAR 90] **Mårtensson, A., Thelandersson, S., Sweden, L. 1990.** Effect of moisture and mechanical loading on wooden materials. Wood Sci. Technol. 1990, Vol. 24, pp. 247-261.
- [MAR 94] **Mårtensson, A. 1994.** Mechano-sorptive effects in wooden material. Wood Sci Technol. 1994, Vol. 28, pp. 437-449.
- [MOH 93] **Mohager, S., Toratti, T. 1993.** Long term bending creep of wood in cyclic relative humidity. Wood Sci. Technol. 1993, Vol. 27, pp. 49-59.
- [MON 12] **Montero, C., Gril, J., Legeas, C., Hunt, D.G., Clair, B. 2012.** Influence of hygromechanical history on the longitudinal mechanosorptive creep of wood. Holzforschung. 2012, Vol. 66(6), pp. 757-764.
- [MOR 94] **Morlier, P. 1994.** Creep in timber structures (Rilem Reports 8). France. CRC Press, 1994. p. 160.
- [MOU 06] **Moutee, M. 2006.** Modélisation du comportement mécanique du bois au cours du séchage. Université Laval. Québec. 2006. Thèse de Doctorat.
- [MOU 05] **Moutou Pitti, R. 2005.** Déformations lors du séchage d’une rondelle de bois vert: modélisation et expérimentation. Université de Limoges 2005. Mémoire de Master.
- [MUK 83] **Mukudai, J. 1983.** Evaluation on non-linear viscoelastic bending deflection of wood. Wood Sci. Technol. 1983, Vol. 17, pp. 39–54.

- [MUK 86] Mukudai, J. 1986. Modeling and simulation of viscoelastic behavior (tensile strain) of wood under moisture change. Wood Sci. Technol. 1986, Vol. 20, pp. 335-348.
- [NAV 02] Navi, P., Pittet, V., Plummer, C. J. G. 2002. Transient moisture effects on wood creep. Wood Sci. Technol. 2002, Vol. 36, pp. 447–462.
- [NAV 05] Navi, P., Heger, F. 2005. Comportement thermo-hydromécanique du bois. Presses polytechniques et universitaires romandes. 2005, p. 298.
- [NAV 12] Navi, P., Sandberg, D. 2012. Thermo-Hydro-Mechanical processing of wood. EPFL Press, 2012. p 280.
- [ORM 98] Ormarsson, S., Dahlblom, O., Petersson, H. 1998. Numerical study of the shape stability of sawn timber subjected to moisture variation, part 1 : theory. Wood Sci. Technol. 1998, Vol. 32, pp. 325-334.
- [PER 72] Perkitny, T., Kingston, R. S. T. 1972. Review of the sufficiency of research on the swelling pressure of wood. Wood Sci. Technol. 1972, Vol. 6, pp. 215-229.
- [PIT 96] Pittet, V. 1996. Etude expérimentale des couplages mécanosorptifs dans le bois soumis à variations hygrométriques contrôlées sous chargements de longue durée. Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, 1996. Thèse de Doctorat.
- [RAB 69] Rabotnov, Y. N. 1969. Creep problems in structural members. London Transcripta Service LTD. 1969, pp. 110-175.
- [RAN 03] Randriambololona, H. 2003. Modélisation du comportement différé du bois en environnement variable. Université de Limoges. 2003, Thèse de Doctorat.
- [RAN 75] Ranta-Maunus, A. 1975. The viscoelasticity of wood at varying moisture content. Wood Sci. Technol. 1975, Vol. 9, pp. 189-205.
- [RAN 93] Ranta-Maunus, A. 1993. Rheological behaviour of wood in directions perpendicular to the grain. Materials and Structures. 1993, Vol. 26, pp. 362-369.
- [REK 94] Rektorys, K. 1994. Survey of applicable mathematics. Kluwer Academic Publishers. 1994.
- [SAL 09] Salençon, J. 2009. Viscoélasticité pour le calcul des structures. Les Editions de l'Ecole Polytechnique, Les Presses des Ponts et Chaussées. 2009.
- [SAI 13a] Saifouni, O., Moutou Pitti, R., Destrebecq, J. F. 2013. Experimental study of mechanosorptive hygro-lock effect in wood subjected to variable loading and relative humidity. Thermo-Hydro-Mechanical Wood Behaviour and Processing, Cost Action FP 0904. 09-11 Avril 2013, Iasi (Roumanie).

[SAI 13b] **Saifouni, O., Moutou Pitti, R., Destrebecq, J. F. 2013.** A pseudoelastic mechanosorptive model for wood material. Thermo-Hydro-Mechanical Wood Behaviour and Processing, Cost Action FP 0904. 09-11 Avril 2013, Iasi (Roumanie).

[SAI 13c] **Saifouni, O., Moutou Pitti, R., Destrebecq, J. F. 2013.** Determination of stresses in drying wood by means of a viscoelastic relaxation model. Conference Proceedings of the Society for Experimental Mechanics. 2013, Vol. 2, pp. 29-36.

[SIM 10] **Simon, P., Maigre, H., Bigorgne, L., Eyheramendy, D., Jullien, J.-F.** Multi-scale study of the variability in softwood transverse elasticity. WCTE 2010, June 2010, Trentino, Italy, p. 8.

[SOV 10] **Sorvari, J., Hämäläinen, J. 2010.** Time integration in linear viscoelasticity - a comparative study. Mech Time-Depend Mater. 2010, Vol. 14(3), pp. 307-328.

[SVE 11] **Svensson, S., Turk, G., Hozjan, T. 2011.** Predicting moisture state of timber members in a continuously varying climate. Engineering Structures 2011, Vol. 33, pp.3064-3070.

[TOR 92] **Toratti, T. 1992.** Creep of timber beams in a variable environment. Helsinki, University of Technology, Finland. 1992. Thèse de Doctorat.

[TOR 00] **Toratti, T., Svensson, S. 2000.** Mechano-sorptive experiments perpendicular to grain under tensile and compressive loads. Wood Sci. Technol. 2000, Vol. 34, pp. 317-326.

[ZIE 68] **Zienkiewicz, O. C., Watson, M., King, I. P. 1968.** A numerical method of visco-elastic stress analysis. Internal Journal of Mechanical Sciences. 1968, Vol. 10(10), pp. 807-827.

[ZOC 97] **Zocher, M.A., Groves, S.E. 1997.** A three-dimensional finite element formulation for thermoviscoelastic orthotropic media. International Journal for Numerical Methods in Engineering. 1997, Vol. 40, pp. 2267-2288.



## ANNEXES

### Annexe 1 : identification des paramètres par la méthode des moindres carrés

#### A1.1 Modèle de Maxwell généralisé

Pour identifier les paramètres d'un modèle de Maxwell généralisé sur un intervalle de temps donné  $[t_0, t_k]$ , on minimise l'erreur entre la fonction de relaxation donnée  $\bar{R}$  et la fonction de relaxation  $R$  exprimée sous la forme d'une série de Dirichlet en fonction des paramètres du modèle. La méthode d'identification se fait indépendamment de l'instant de chargement  $t_0$ , on pose  $R(t_0, t_j) = R_j$ , d'où :

$$e_j = (\bar{R}_j - R_j) \rightarrow S = \sum_{j=0}^k e_j^2 \quad (\text{A1.1})$$

Nous savons que la fonction d'erreur  $S$  passe par un minimum lorsque ses dérivées partielles sont nulles, donc :

$$\frac{\partial S}{\partial E_\mu} = 0 \rightarrow \sum_{j=0}^k R_j \left( \frac{\partial R_j}{\partial E_\mu} \right) = \sum_{j=0}^k \bar{R}_j \left( \frac{\partial R_j}{\partial E_\mu} \right) \quad (\text{A1.2})$$

Dans un Maxwell généralisé, la première branche ( $\mu = 0$ ) est un ressort élastique :

$$\sum_{j=0}^k [E_0 + E_1 e^{-\alpha_1(t_j-t_0)} + \dots + E_r e^{-\alpha_r(t_j-t_0)}] = \sum_{j=0}^k \bar{R}_j \quad (\text{A1.3})$$

Pour les autres branches  $\mu = 1 \dots r$  :

$$\sum_{j=0}^k [E_0 + E_1 e^{-\alpha_1(t_j-t_0)} + \dots + E_r e^{-\alpha_r(t_j-t_0)}] e^{-\alpha_\mu(t_j-t_0)} = \sum_{j=0}^k \bar{R}_j e^{-\alpha_\mu(t_j-t_0)} \quad (\text{A1.4})$$

D'où l'écriture sous forme matricielle

$$[A]\{E\} = \{B\} \quad (\text{A1.5})$$

avec

$$A_{0,0} = k \quad (\text{A1.6})$$

$$A_{0,q} = \sum_{j=0}^k e^{-\alpha_q(t_j-t_0)} \quad A_{p,0} = \sum_{j=0}^k e^{-\alpha_p(t_j-t_0)} \quad \forall q, p = 1 \dots r \quad (\text{A1.7})$$

$$A_{p,q} = \sum_{j=0}^k e^{-\alpha_q(t_j-t_0)} e^{-\alpha_p(t_j-t_0)} \quad \forall q, p = 1 \dots r \quad (\text{A1.8})$$

$$B_0 = \sum_{j=0}^k \bar{R}_j \quad B_q = \sum_{j=0}^k \bar{R}_j e^{-\alpha_q(t_j-t_0)} \quad \forall q = 1 \dots r \quad (\text{A1.9})$$



La première valeur du vecteur de la fonction de relaxation représente l'élasticité instantanée ( $E_{inst}$ ) du modèle de Maxwell. D'où l'écriture de l'équation (2) pour les branches  $\mu = 1 \dots r$  :

$$\sum_{j=0}^k \left[ E_{inst} + E_1 \left( e^{-\alpha_1(t_j-t_0)} - 1 \right) + \dots + E_r \left( e^{-\alpha_r(t_j-t_0)} - 1 \right) \right] e^{-\alpha_\mu(t_j-t_0)} = \sum_{j=0}^k \bar{R}_j e^{-\alpha_\mu(t_j-t_0)} \quad (A1.10)$$

d'où

$$\sum_{j=0}^k \left[ E_1 \left( e^{-\alpha_1(t_j-t_0)} - 1 \right) + \dots + E_r \left( e^{-\alpha_r(t_j-t_0)} - 1 \right) \right] e^{-\alpha_\mu(t_j-t_0)} = \sum_{j=0}^k (\bar{R}_j - E_{inst}) e^{-\alpha_\mu(t_j-t_0)} \quad (A1.11)$$

avec

$$E_0 = E_{inst} - \sum_{\mu=1}^r E_\mu \quad (A1.12)$$

d'où l'écriture sous forme matricielle suivante

$$[A]\{E\} = \{B\} \quad (A1.13)$$

avec

$$A_{p,q} = \sum_{j=0}^k \left( e^{-\alpha_p(t_j-t_0)} - 1 \right) e^{-\alpha_q(t_j-t_0)} \quad \forall q, p = 1 \dots r \quad (A1.14)$$

$$B_q = \sum_{j=0}^k (\bar{R}_j - E_{inst}) e^{-\alpha_q(t_j-t_0)} \quad \forall q = 1 \dots r \quad (A1.15)$$

### A1.2 Modèle de Kelvin généralisé

De même pour le modèle de Kelvin, la méthode consiste à minimiser l'erreur entre la courbe de fluage de référence et la courbe représentée par la série de Dirichlet

$$e_j = (\bar{J}_j - J_j) \rightarrow S = \sum_{j=0}^k e_j^2 \quad (A1.16)$$

$$\frac{\partial S}{\partial G_\mu} = 0 \rightarrow \sum_{j=0}^k J_j \left( \frac{\partial J_j}{\partial G_\mu} \right) = \sum_{j=0}^k \bar{J}_j \left( \frac{\partial J_j}{\partial G_\mu} \right) \text{ avec } G_\mu = \frac{1}{E'_\mu} \quad (A1.17)$$

Pour le ressort seul ( $\mu = 0$ )

$$\sum_{j=0}^k \left[ G_0 + G_1 \left( 1 - e^{-\alpha'_1(t_j-t_0)} \right) + \dots + G_r \left( 1 - e^{-\alpha'_r(t_j-t_0)} \right) \right] = \sum_{j=0}^k \bar{J}_j \quad (A1.18)$$

Pour les autres branches ( $\mu = 1 \dots r$ )

$$\sum_{j=0}^k \left[ G_0 + G_1 \left( 1 - e^{-\alpha'_1(t_j-t_0)} \right) + \dots + G_r \left( 1 - e^{-\alpha'_r(t_j-t_0)} \right) \right] \left[ \left( 1 - e^{-\alpha'_\mu(t_j-t_0)} \right) \right] = \sum_{j=0}^k \bar{J}_j \left( 1 - e^{-\alpha'_\mu(t_j-t_0)} \right) \quad (A1.19)$$

d'où l'écriture sous la forme matricielle

$$[A'] \left\{ \frac{1}{E'} \right\} = \{B'\} \quad (\text{A1.20})$$

avec

$$A'_{0,0} = k A'_{0,q} = \sum_{j=0}^k (1 - e^{-\alpha'_q(t_j-t_0)}) A'_{p,0} = \sum_{j=0}^k (1 - e^{-\alpha'_p(t_j-t_0)}) \quad \forall q, p = 1 \dots r \quad (\text{A1.21})$$

$$A'_{p,q} = \sum_{j=0}^k (1 - e^{-\alpha'_q(t_j-t_0)}) (1 - e^{-\alpha'_p(t_j-t_0)}) \quad \forall q, p = 1 \dots r \quad (\text{A1.22})$$

$$B'_0 = \sum_{j=0}^k \bar{J}_j B'_q = \sum_{j=0}^k \bar{J}_j (1 - e^{-\alpha'_q(t_j-t_0)}) \quad \forall q = 1 \dots r \quad (\text{A1.23})$$

L'inverse de la première valeur de la fonction de fluage représente l'élasticité instantanée dans un modèle de Kelvin. Si cette valeur est déjà connue, l'équation (2) peut s'écrire pour les cellules  $\mu = 1 \dots r$

$$\sum_{j=0}^k \left[ G_1 (e^{-\alpha_1(t_j-t_0)} - 1) + \dots + G_r (e^{-\alpha_r(t_j-t_0)} - 1) \right] (e^{-\alpha_\mu(t-t_0)}) = \sum_{j=0}^k (\bar{J}_j - G_0) e^{-\alpha_\mu t_j - t_0} \quad (\text{A1.24})$$

avec  $G_0 = \bar{J}_0$

d'où l'écriture sous forme matricielle

$$[A]\{E\} = \{B\} \quad (\text{A1.25})$$

avec

$$A_{p,q} = \sum_{j=0}^k (1 - e^{-\alpha_q(t_j-t_0)}) (1 - e^{-\alpha_p(t_j-t_0)}) \quad \forall q, p = 1 \dots r \quad (\text{A1.26})$$

$$B_q = \sum_{j=0}^k (\bar{J}_j - G_0) (1 - e^{-\alpha_q(t_j-t_0)}) \quad \forall q = 1 \dots r \quad (\text{A1.27})$$

## Annexe 2 : Méthodes de résolution numérique de l'équation intégrale

### A2.1 A partir de l'équation de Boltzmann

$$\sigma(t) = \int_0^t R(\tau, t) \dot{\varepsilon}(\tau) d\tau \quad (\text{A2.1})$$

On suppose que la sollicitation en déformation varie d'une façon linéaire sur l'intervalle de temps  $[t_k, t_k + \Delta t_k] = [t_k, t_{k+1}]$ , c'est-à-dire

$$\varepsilon(\tau) = \varepsilon(t) + (\tau - t) \frac{\Delta \varepsilon}{\Delta t} \rightarrow \dot{\varepsilon}(\tau) = \frac{\Delta \varepsilon}{\Delta t} = \text{cte} \quad (\text{A2.2})$$

On peut écrire l'équation de Boltzmann par la discrétisation de l'intégrale sur les intervalles  $[t_k, t_{k+1}]$  avec  $\sum_{k=0}^{j-1} [t_k, t_{k+1}] = [t_0, t_j]$  tel que

$$\sigma(t_j) = \sum_{k=0}^{j-1} \frac{\Delta \varepsilon_k}{\Delta t_k} \int_{t_k}^{t_{k+1}} R(\tau, t_j) d\tau \quad (\text{A2.3})$$

avec  $\varepsilon_k = \varepsilon(t_k)$ ,  $\Delta \varepsilon_k = \varepsilon_{k+1} - \varepsilon_k$ ,  $R(t_k, t_j) = J_{k,j}$ , etc.

Résolution par la méthode d'intégration numérique

#### a. Méthode de Riemann

- Riemann à droite

$$\sigma_j = \sum_{k=0}^{j-1} \Delta \varepsilon_k R_{k,j} \quad (\text{A2.4})$$

- Riemann à gauche

$$\sigma_j = \sum_{k=0}^{j-1} \Delta \varepsilon_k R_{k+1,j} \quad (\text{A2.5})$$

#### b. Méthode des trapèzes

$$\sigma_j^T = \sum_{k=0}^{j-1} \frac{\Delta \varepsilon_k}{2} (R_{k,j} + R_{k+1,j}) \quad (\text{A2.6})$$

#### c. Méthode du point milieu

$$\sigma_j^M = \sum_{k=0}^{j-1} \Delta \varepsilon_k \left( R_{k+\frac{1}{2},j} \right) \quad (\text{A2.7})$$

avec  $t_{k+\frac{1}{2}} = \frac{t_k + t_{k+1}}{2}$

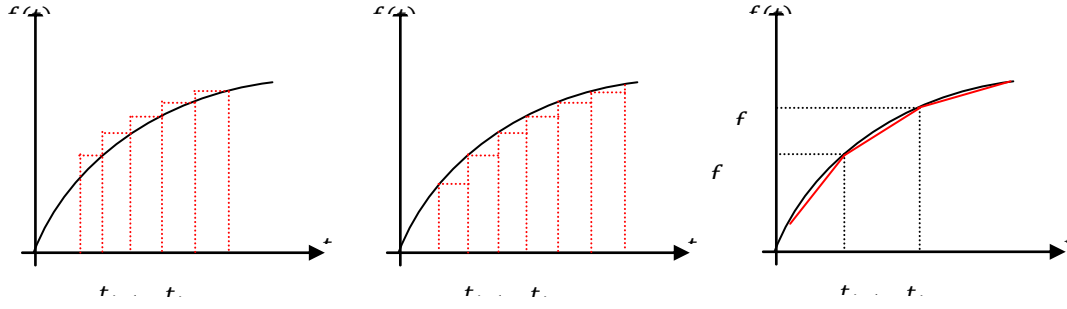


Figure A.2: Courbes des méthodes d'intégrations numériques : a- Riemann à gauche b- Riemann à droite c- Méthode des trapèzes

#### d. Méthode de Simpson

L'erreur de la méthode des trapèzes est de l'ordre de  $-\frac{\Delta t_k^3}{12}$  et celle de la méthode du point milieu est de l'ordre de  $\frac{\Delta t_k^3}{24}$ , l'idée est de réduire ces erreurs à l'aide de la formule d'intégration :

$$\sigma_j = \frac{\sigma_j^T + 2\sigma_j^M}{3} = \sum_{k=0}^{j-1} \Delta \varepsilon_k \left( \frac{R_{k,j} + R_{k+1,j} + 4R_{k+\frac{1}{2},j}}{6} \right) \quad (\text{A2.8})$$

Cette méthode est exacte pour les polynômes de degré 2.

#### e. Méthodes de quadrature de Gauss

Le principe est de remplacer le calcul de l'intégrale par une somme pondérée

$$\varepsilon_j = \sum_{k=0}^{j-1} \frac{\Delta \sigma_k}{\Delta t_k} \left( \sum_i^n \omega_i f(t_i) \right) \quad (\text{A2.9})$$

C'est une méthode exacte pour un polynôme de degrés  $(2n-1)$  pour  $n$  instants pris sur l'intervalle d'intégration.

En remplaçant  $R$  par une série de Dirichlet

$$R(t_0, t) = \sum_{\mu=0}^r E_{\mu} e^{-\alpha_{\mu}(t-t_0)} \quad \text{avec} \quad \alpha_0 = 0 \quad (\text{A2.10})$$

On suppose que le matériau est non vieillissant, donc les  $E_{\mu}$  ne varient pas au cours du temps.

$$\sigma(t_j) = \sum_{k=0}^{j-1} \frac{\Delta \varepsilon_k}{\Delta t_k} \sum_{\mu=0}^r \frac{E_{\mu}}{\alpha_{\mu}} (1 - e^{-\alpha_{\mu} \Delta t_k}) \quad (\text{A2.11})$$

**f. Formulation incrémentale**

- Exprimer la fonction de relaxation sous la forme d'une série de Dirichlet (en fonction des paramètres d'un modèle de Maxwell) dans l'équation de Boltzmann établie en relaxation ;
- Écrire cette équation pour chaque branche du modèle à l'instant  $t + \Delta t$ , puis exprimer  $\Delta\sigma_\mu$  en déduisant  $\sigma_\mu(t)$  de cette équation ;
- Simplifier l'intégrale restante en supposant que la sollicitation varie linéairement sur l'intervalle  $[t, t + \Delta t]$ ,
- Enfin, on généralise pour toutes les branches de Maxwell afin d'aboutir à l'équation linéaire suivante :

$$\Delta\sigma = \tilde{E}\Delta\varepsilon - \sigma^{hist}(t) \quad (\text{A2.13})$$

avec

$$\begin{cases} \tilde{E} = \sum_{\mu=0}^r \tilde{E}_\mu = E_0 + \sum_{\mu=1}^r E_\mu \frac{1-e^{-\alpha_\mu \Delta t}}{\alpha_\mu \Delta t} \\ \sigma^{hist}(t) = \sum_{\mu=1}^r \sigma_\mu^{hist}(t) = \sum_{\mu=1}^r (1 - e^{-\alpha_\mu \Delta t}) \sigma_\mu(t) \end{cases} \quad (\text{A2.14})$$

**A2.2 A partir de l'équation de Volterra**

$$\sigma(t) = R(t, t)\varepsilon(t) - \int_{t_0}^t \dot{R}(\tau, t)\varepsilon(\tau)d\tau \quad (\text{A2.15})$$

On suppose que la fonction de relaxation est linéaire sur l'intervalle  $[t_k, t_k + \Delta t_k]$

$$R(\tau) = R(t) + (\tau - t) \frac{\Delta R}{\Delta t} \rightarrow \dot{R}(\tau) = \frac{\Delta R}{\Delta t} = \text{cst} \quad (\text{A2.16})$$

On peut écrire l'équation de Volterra par la discrétisation de l'intégrale sur les intervalles  $[t_k, t_{k+1}]$  avec  $\sum_{k=0}^{j-1} [t_k, t_{k+1}] = [t_0, t_j]$  tel que :

$$\sigma(t_j) = R(t_j, t_j)\varepsilon(t_j) - \sum_{k=0}^{j-1} \frac{\Delta R_{k,j}}{\Delta t_k} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \varepsilon(\tau)d\tau \quad (\text{A2.17})$$

avec  $\varepsilon_k = \varepsilon(t_k)$ ,  $\Delta\varepsilon_k = \varepsilon_{k+1} - \varepsilon_k$ ,  $R(t_k, t_j) = J_{k,j}$ , etc.

**a. Résolution par la méthode d'intégration numérique**

De la même façon que pour l'équation de Boltzmann, on peut faire une approximation de l'intégrale  $\int_{t_k}^{t_{k+1}} \varepsilon(\tau)d\tau$  en utilisant l'une des méthodes d'intégration numérique (Riemann, trapèzes, point du milieu, Simpson, quadrature de Gauss)

**b. En remplaçant R par une série de Dirichlet**

$$\sigma(t_j) = R(t_j, t_j)\varepsilon(t_j) - \sum_{k=0}^{j-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \sum_{\mu=0}^r E_\mu \alpha_\mu e^{-\alpha_\mu(t_k-\tau)} \varepsilon(\tau)d\tau \quad (\text{A2.18})$$

$$\text{On a : } \varepsilon(\tau) = \varepsilon(t) + (\tau - t) \frac{\Delta \varepsilon}{\Delta t} \text{ et } R(t_j, t_j) \varepsilon(t_j) = \sum_{\mu=0}^r E_{\mu} \varepsilon(t_j) \quad (\text{A2.19})$$

Sachant que :  $\sigma = \sum_{\mu=0}^r \sigma_{\mu}$

$$\sigma_{\mu}(t_j) = E_{\mu} \varepsilon(t_j) - \sum_{k=0}^{j-1} E_{\mu} \alpha_{\mu} \int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{-\alpha_{\mu}(t_k - \tau)} \left( \varepsilon(t) + (\tau - t) \frac{\Delta \varepsilon}{\Delta t} \right) d\tau \quad (\text{A2.20})$$

Après intégration et simplification :

$$\sigma_{\mu}(t_j) = E_{\mu} \varepsilon(t_j) - \sum_{k=0}^{j-1} (\varepsilon(t_k) E^* + \Delta \varepsilon_{kk} E^{**}) \quad (\text{A2.21})$$

avec

$$\begin{cases} E^* = E_{\mu} \left( e^{-\alpha_{\mu}(t_j - t_k)} \right) (e^{-\alpha_{\mu} \Delta t_k} - 1) \\ E^{**} = \frac{E_{\mu}}{\Delta t_k} e^{-\alpha_{\mu}(t_j - t_k)} \left( \left( \Delta t_k - \frac{1}{\alpha_{\mu}} \right) e^{-\alpha_{\mu} \Delta t_k} + \frac{1}{\alpha_{\mu}} \right) \end{cases} \quad (\text{A2.22})$$

$$\sigma = \sum_{\mu=0}^r \sigma_{\mu} \dots$$

### c. Utilisation de la méthode de quadrature de Gauss

Connaissant l'équation de la sollicitation et la dérivée de la fonction de relaxation donnée en forme analytique ou en série de Dirichlet en fonction des paramètres d'un modèle rhéologique, on pose :  $f(t_k, t_j) = \dot{R}(t_k, t_j) \varepsilon(t_k)$  d'où :

$$\sigma(t_j) = \sum_{k=0}^n \omega_k f(t_k, t_j) \quad (\text{A2.23})$$

Cette méthode est directe, les instants  $t_k$  ou les pas de temps  $\Delta t_k$  sont déterminés selon la fonction choisie pour la résolution (Hermite, Legendre....).

### d. Par approximation de la partie intégrale

On remplace l'expression de la fonction de relaxation sous forme d'une série de Dirichlet (en fonction des paramètres d'un modèle de Maxwell) dans l'équation de Volterra établie en relaxation :

$$\sigma(t) = \sum_{\mu=0}^r \sigma_{\mu} = \sum_{\mu=0}^r E_{\mu} \varepsilon(t) - \int_{t_0}^t \sum_{\mu=0}^r E_{\mu} \alpha_{\mu} e^{-\alpha_{\mu}(t-\tau)} \varepsilon(\tau) d\tau \text{ avec } \alpha_0 = 0 \quad (\text{A2.24})$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\mu}(t + \Delta t) &= E_{\mu} \varepsilon(t + \Delta t) - \int_{t_0}^t E_{\mu} \alpha_{\mu} e^{-\alpha_{\mu} \Delta t} e^{-\alpha_{\mu}(t-\tau)} \varepsilon(\tau) d\tau \\ &\quad - \int_t^{t+\Delta t} E_{\mu} \alpha_{\mu} e^{-\alpha_{\mu}(t+\Delta t-\tau)} \varepsilon(\tau) d\tau \end{aligned}$$

$$= E_\mu(\varepsilon(t) + \Delta\varepsilon) - e^{-\alpha_\mu \Delta t} \left( \sigma_\mu(t) - E_\mu \varepsilon(t) \right) - I \quad (\text{A2.25})$$

Jusqu'à ce stade, l'équation précédente donne une solution exacte. Dans la prochaine étape, afin de résoudre l'intégrale  $I$ , on peut approximer la partie intégrale par l'équation suivante

$$\begin{aligned} \sigma_\mu(t + \Delta t) = \\ E_\mu(\varepsilon(t) + \Delta\varepsilon) - e^{-\alpha_\mu \Delta t} \left( \sigma_\mu(t) - E_\mu \varepsilon(t) \right) - E_\mu \alpha_\mu \int_t^{t+\Delta t} e^{-\alpha_\mu(t+\Delta t-\tau)} \varepsilon(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (\text{A2.26})$$

**e. Par approximation linéaire (formulation incrémentale)**

On suppose que la déformation varie linéairement sur l'intervalle  $\Delta\varepsilon$

$$\begin{aligned} I &= E_\mu \alpha_\mu \int_t^{t+\Delta t} e^{-\alpha_\mu(t+\Delta t-\tau)} \left( \varepsilon(t) + (\tau - t) \frac{\Delta\varepsilon}{\Delta t} \right) d\tau \\ &= E_\mu \alpha_\mu \left[ \frac{\varepsilon(t)}{\alpha_\mu} (1 - e^{-\alpha_\mu \Delta t}) + \left( \frac{\Delta\varepsilon}{\Delta t} \right) \left( \frac{\Delta t}{\alpha_\mu} + \frac{1}{\alpha_\mu} + \frac{e^{-\alpha_\mu \Delta t}}{\alpha_\mu} \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{A2.27})$$

$$\begin{aligned} \Delta\sigma_\mu &= E_\mu(\varepsilon(t) + \Delta\varepsilon) + \sigma_\mu(t)(1 - e^{-\alpha_\mu \Delta t}) - E_\mu \varepsilon(t) e^{-\alpha_\mu \Delta t} - E_\mu \varepsilon(t)(1 - e^{-\alpha_\mu \Delta t}) - \\ &E_\mu \Delta\varepsilon \left( 1 - \left( \frac{1 - e^{-\alpha_\mu \Delta t}}{\alpha_\mu \Delta t} \right) \right) \end{aligned} \quad (\text{A2.28})$$

$$\Delta\sigma_\mu = \Delta\varepsilon E_\mu \left( \frac{1 - e^{-\alpha_\mu \Delta t}}{\alpha_\mu \Delta t} \right) - \sigma_\mu(t)(1 - e^{-\alpha_\mu \Delta t}) \quad (\text{A2.29})$$

On retrouve la formulation incrémentale obtenue précédemment à partir de l'équation de Boltzmann.

**f. Par la valeur moyenne**

En remplace la déformation par une valeur moyenne évaluée à l'aide de l'approximation de Simpson

$$\int_t^{t+\Delta t} \varepsilon(\tau) d\tau = \frac{\varepsilon^T + 2\varepsilon^M}{3} = (\Delta t) \left( \frac{\varepsilon(t) + \varepsilon(t+\Delta t) + 4\varepsilon(t_{1/2})}{6} \right) \quad (\text{A2.30})$$

**g. Par application directe de l'approximation de Simpson**

On pose  $g(\tau) = e^{-\alpha_\mu(t+\Delta t-\tau)} \varepsilon(\tau)$

$$E_\mu \alpha_\mu \int_t^{t+\Delta t} g(\tau) d\tau = E_\mu \alpha_\mu \cdot \left( \frac{\Delta t}{6} \right) \left[ g(t) + g(t + \Delta t) + 4g\left(t + \frac{\Delta t}{2}\right) \right] \quad (\text{A2.31})$$

avec

$$g(t) = e^{-\alpha_\mu(\Delta t)} \varepsilon(t) \text{ et } g(t + \Delta t) = \varepsilon(t) + \Delta\varepsilon(t) \quad (\text{A2.32})$$

$$g\left(t + \frac{\Delta t}{2}\right) = e^{-\alpha_{\mu}\left(\frac{\Delta t}{2}\right)} \varepsilon\left(t + \frac{\Delta t}{2}\right) \quad (\text{A2.33})$$

$\varepsilon\left(t + \frac{\Delta t}{2}\right)$  : inconnue supplémentaire



## Annexe 3: Données pour les essais

### A3.1 Introduction

Soumis à une contrainte mécanique combinée à une variation de l'humidité relative, le bois présente un comportement complexe appelé mécanosorption. La principale particularité de ce comportement repose dans le blocage des déformations pendant les phases de séchage ou effet hygroverrou. Dans la littérature (chapitre 1), plusieurs tests ont été rapportés en ce qui concerne le comportement mécanosorptif, mais l'effet hygroverrou reste mal connu et mérite d'être étudié en particulier dans le cas de charge variable exprimée en relaxation. Ce travail est effectué dans le cadre d'une STSM (Short Term Scientific Mission) de l'action COST FP0904. Le travail a été effectué à l'Université Bernoise en Suisse. Dans ce STMS, une série de tests de relaxation est conduit sur le Sapin Blanc (*Abies alba*) du Massif Central. Le choix de cette essence se justifie par son importance en terme de population dans le Massif Central et notamment les problèmes liés au séchage. Les tests effectués se concentrent sur l'étude de son comportement hygroverrou et mécanosorptif sous chargement mécanique et humidité relative cycliques. Ces essais sont nécessaires pour la validation des formulations théoriques et des modèles numériques. Ils permettent également de fournir des données importantes sur les caractéristiques de l'essence ainsi que ses paramètres viscoélastiques.

### A3.2 Zones de découpe

Comme rappelé précédemment, l'essence du bois utilisé dans cette campagne d'essai est le Sapin Blanc du Massif Central. Les échantillons ont été fournis par l'association interprofessionnelle Auvergne Promobois.

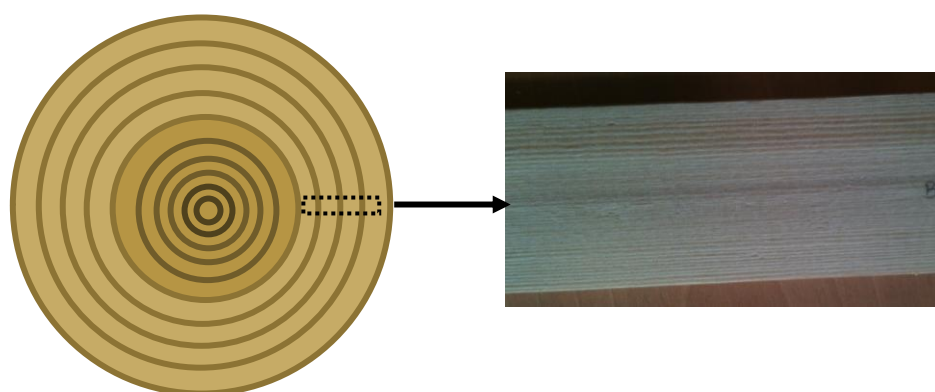


Figure A3.1 : Position de prélèvement des lamelles

Tout d'abord, des lamelles de bois ont été découpées dans le sens des fibres avec une épaisseur d'environ 5mm dans la direction tangentielle (Figure A3.1). Par la suite, ces lamelles ont été rabotées de façon à obtenir une épaisseur de l'ordre de 1mm. Au moyen d'une scie électricienne de précision, les échantillons ont ensuite été découpés sur une largeur de 3 mm dans le sens radial et 50 mm dans le sens longitudinal.

## A3.3 Nomenclature des échantillons

Zone	Échantillon	Dimensions	Essai
P21	P21-1	2,78 x 1,10	Traction 05%_1
	P21-2	2,93 x 1,13	Traction 25%_1
	P21-3	2,93 x 1,15	Traction 25%_2
	P21-4	2,75 x 1,11	Traction 25%_4
	P21-5	3,05 x 1,15	Traction 75%_1
	P21-6	3,03 x 1,13	Traction 75%_6
P23	P23-1	2,93 x 1,16	Traction 05%_3
	P23-2	2,8 x 1,13	Traction 50%_3
	P23-3	2,78 x 1,13	Traction 75%_3
P22	P22-1	2,80 x 1,05	Traction 05%_2
	P22-2	2,92 x 1,17	Traction 25%_3
	P22-3	2,95 x 1,13	Traction 50%_1
	P22-4	3,00 x 1,17	Traction 75%_2
	P22-5	3,03 x 1,17	Traction 75%_4
	P22-6	3,01 x 1,11	Traction 75%_5
	P22-7	2,93 x 1,10	Relaxation 05%_1 à 6
	P22-8	2,88 x 1,08	Relaxation 25%_1
	P22-9	2,76 x 1,16	Relaxation 50%_3
	P22-10	3,03 x 1,17	Relaxation 75%_1
P24	P24-1	2,92 x 0,76	Traction 50%_2
	P24-2	2,92 x 0,77	Essai mécanosorptif cyclique
			Essais déformation hydrique
			Traction 50%_4
	P24-3	3,05 x 0,89	Relaxation 50%_1 à 2
	P24-4	2,50 x 0,75	Relaxation 70%_1 à 4
	P24-5	2,82 x 0,75	Mécanosorption : cycles humide & sec
			Contraintes hydriques
			Relaxation 30%_1
	P24-6	2,4 x 0,75	Fluage 30%_1

Tableau A3.1 : Nomenclature des échantillons en fonction de leurs dimensions, type et essais.

## A3.4 Résultats des essais préliminaires

Essai	HR %	Échantillons	$\sigma_{rupture}$ [MPa]	$E$ [GPa]
Traction Rupture	5	P21-1	105,075	23,143
		P22-1	104,781	21,941
		P23-1	95,02	19,701
	25	P21-2	114,082	18,563
		P21-3	95,123	20,711
		P22-2	147,137	18,944
		P21-4	152,581	20,568
	50	P22-3	136,163	16,118
		P24-1	116,054	14,632
		P23-2	126,603	14,455
		P24-2	144,499	17,381
	75	P21-5	91,427	18,229
		P22-4	115,763	14,751
		P23-3	143,543	14,800
		P22-5	85,775	16,653
		P22-6	90,226	16,019
		P21-6	92,566	15,619
Relaxation	5	P22-7	-	18,897
	25	P22-8	-	18,951
	30	P24-5	-	18,547
	50	P22-9	-	16,494
		P24-3	-	19,124
	70	P24-4	-	16,520
	75	P22-10	-	-
Fluage	30	P24-6	-	18,552

Tableau A3.2 : résultats des essais de traction

Essai	Nom de l'essai	Échantillon	E [GPa]
Relaxation 05%	R1	P22-7	18,897
	R2		19,302
	R3		18,483
	R4		18,596
	R5		18,641
	R6		18,364
	Elastique1		18,438
		Écart type relatif	1,618 %

Relaxation 70%	R1	P24-4	15,636
	R2		16,055
	R3		15,181
	R4		15,384
		Écart type relatif	2,095 %

Tableau A3.3 : dispersion des mesures du module d'élasticité entre plusieurs essais pour le même échantillon

## Annexe 4 : Identification des paramètres

### A4.1 Identification des paramètres du modèle de Maxwell

Dans un essai de relaxation, à l'instant de chargement, le module d'élasticité instantané est représenté par la somme des ressorts du modèle de Maxwell :

$$E_{inst} = E_0 + \sum_{\mu=1}^r E_{\mu} \quad (A3.1)$$

Ce module est mesuré de façon exacte dans la courbe de relaxation expérimentale  $\bar{R}$  ; il est représenté par la première valeur du vecteur de la fonction de relaxation (à l'instant de chargement).

On définit des modules d'élasticité adimensionnels  $\rho_{\mu}$  ( $\mu = 1..r$ ) liés aux ressorts élastiques des modèles rhéologiques par le module d'élasticité instantané, tel que :

$$\forall \mu = 0 .. r : \rho_{\mu} = \frac{E_{\mu}}{E_{inst}} \quad \text{avec} \quad \rho_0 + \sum_{\mu=1}^r \rho_{\mu} = 1 \quad (A3.2)$$

La formulation de la méthode des moindres carrés s'écrit pour les branches  $\mu = 1 \dots r$  :

$$\forall t_j : \sum_{j=0}^k [E_0 + E_1 e^{-\alpha_1(t_j-t_0)} + \dots + E_r e^{-\alpha_r(t_j-t_0)}] e^{-\alpha_{\mu}(t_j-t_0)} = \sum_{j=0}^k \bar{R}_j e^{-\alpha_{\mu}(t_j-t_0)} \quad (A3.3)$$

En utilisant des paramètres adimensionnels, l'expression précédente devient :

$$\forall t_j : \sum_{j=0}^k [\rho_0 + \rho_1 e^{-\alpha_1(t_j-t_0)} + \dots + \rho_r e^{-\alpha_r(t_j-t_0)}] e^{-\alpha_{\mu}(t_j-t_0)} = \sum_{j=0}^k \bar{R}_{n_j} e^{-\alpha_{\mu}(t_j-t_0)} \quad (A3.4)$$

avec :

$$\rho_0 + \sum_{\mu=1}^r \rho_{\mu} = 1 \quad (A3.5)$$

$\bar{R}_n$  est la fonction de relaxation relative expérimentale, elle est donnée par :

$$\bar{r} = \frac{\bar{R}}{E_{inst}} = \frac{\bar{R}}{R(t_0, t_0)} \quad (A3.6)$$

Le module adimensionnel du premier ressort s'écrit :

$$\rho_0 = 1 - \sum_{\mu=1}^r \rho_{\mu} \quad (A3.7)$$

On remplaçant dans la formulation des moindres carrés, on obtient :

$$\sum_{j=0}^k [\rho_1 (e^{-\alpha_1(t_j-t_0)} - 1) + \dots + \rho_r (e^{-\alpha_r(t_j-t_0)} - 1)] e^{-\alpha_{\mu}(t_j-t_0)} = \sum_{j=0}^k (\bar{R}_n - 1) e^{-\alpha_{\mu}(t_j-t_0)} \quad (A3.8)$$

D'où l'écriture sous forme matricielle :

$$[A]\{\rho\} = \frac{1}{E_{inst}}\{B\} \quad (A3.9)$$

avec

$$\{\rho\} = \frac{1}{E_{inst}}\{E\} \quad (A3.10)$$

$$A_{q,p} = \sum_{j=0}^k \left( e^{-\alpha_p(t_j-t_0)} - 1 \right) e^{-\alpha_q(t_j-t_0)} \quad \forall q, p = 1 \dots r \quad (A3.11)$$

$$B_q = \sum_{j=0}^k (\bar{R}_n - 1) e^{-\alpha_q(t_j-t_0)} \quad \forall q = 1 \dots r \quad (A3.12)$$

#### A4.2 Identification des paramètres du modèle de Kelvin

Dans un essai de fluage, la première valeur de la courbe de fluage représente la souplesse instantanée. L'inverse de cette valeur donne le module d'élasticité instantanée. Dans un modèle de Kelvin généralisé, l'élasticité instantanée est modélisée par le ressort indépendant. L'intégration de cette valeur dans la formulation d'identification d'un modèle de Kelvin donne pour les cellules  $\mu = 1 \dots r$  l'expression suivante :

$$\sum_{j=0}^k \left[ G_1 \left( 1 - e^{-\alpha_1(t_j-t_0)} \right) + \dots + G_r \left( 1 - e^{-\alpha_r(t_j-t_0)} \right) \right] \left( 1 - e^{-\alpha_\mu(t_j-t_0)} \right) = \sum_{j=0}^k \frac{1}{E_\mu} \left( 1 - e^{-\alpha_\mu(t_j-t_0)} \right) \quad (A3.13)$$

$$\text{avec } G_\mu = \frac{1}{E_\mu} \text{ et } G_0 = \bar{J}_0$$

En utilisant des paramètres adimensionnels, l'expression précédente devient :

$$\sum_{j=0}^k \left[ \gamma_1 \left( 1 - e^{-\alpha_1(t_j-t_0)} \right) + \dots + \gamma_r \left( 1 - e^{-\alpha_r(t_j-t_0)} \right) \right] \left( 1 - e^{-\alpha_\mu(t_j-t_0)} \right) = \sum_{j=0}^k \gamma_0 \left( 1 - e^{-\alpha_\mu(t_j-t_0)} \right) \quad (A3.14)$$

$$\text{Avec : } \gamma_\mu = \frac{G_\mu}{G_0} = \frac{E_0}{E_\mu} \text{ et } \gamma_0 = 1$$

$\bar{J}_n$  est la fonction de fluage adimensionnelle, elle est donnée par :

$$\bar{J} = \frac{J}{G_0} \quad (A3.15)$$

d'où l'écriture sous la forme matricielle :

$$[A]\{\gamma\} = E_{inst}\{B\} \quad (A3.16)$$

avec

$$A_{p,q} = \sum_{j=0}^k \left( 1 - e^{-\alpha_p(t_j-t_0)} \right) \left( 1 - e^{-\alpha_q(t_j-t_0)} \right) \quad \forall p, q = 1 \dots r \quad (A3.17)$$

$$B_p = \sum_{j=0}^k (\bar{J}_j - \gamma_0) (1 - e^{-\alpha_p(t_j - t_0)}) \quad \forall p = 1 \dots r \quad (\text{A3.18})$$

### A4.3 Application

Les figures ci-dessous montrent l'effet de la prise en considération de la première valeur dans l'exemple de l'essai de relaxation à 30% d'humidité relative Figure (a) et après identification de l'essai de fluage à 30% d'humidité relative Figure (b).

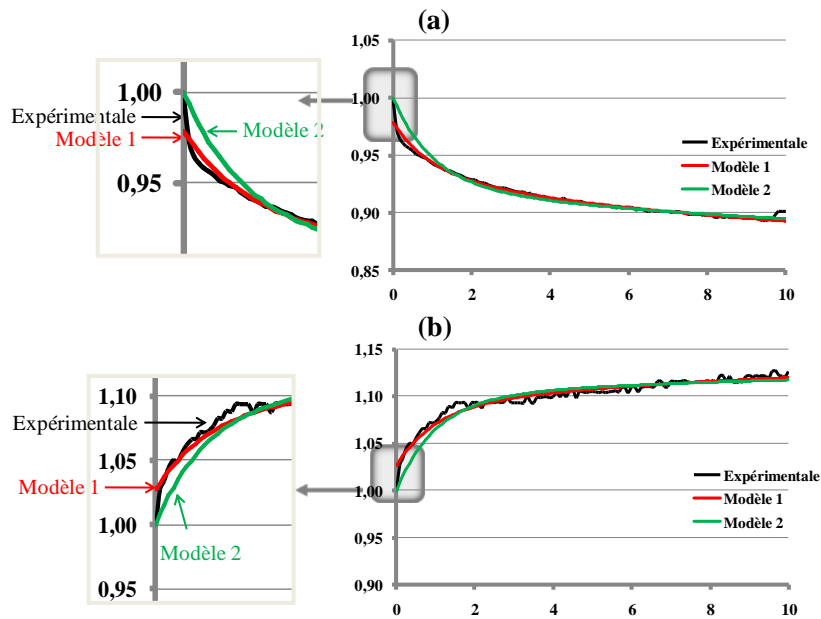


Figure A4.1 : Illustration de l'effet de la prise en considération de la première valeur

Le modèle 1 (trait rouge) représente les courbes de relaxation (relaxation) relatives calculées par série de Dirichlet à partir des paramètres d'un modèle Maxwell (Kelvin) identifiés sans la prise en considération du module instantané. Le modèle 2 (trait vert) représente la courbe calculée par série de Dirichlet à partir des paramètres du modèle identifié avec la prise en considération du module instantané. La comparaison de ces courbes avec la courbe expérimentale (trait noir) montre l'importance de la prise en considération de la première valeur notamment pour l'identification des courbes relatives qui dépendent de la valeur initiale.